常微分方程

柳彬

Solution Manual

Lucian

Version 1.7, May 15, 2026

前言

回忆在时间上留下刻痕，正是这些刻痕，使回忆不再只是流逝的影子，而成为可以被反复触摸的存在。它们沉默地镶嵌在我们走过的路径上，像一条看不见却始终存在的纹理，将过去与此刻悄然连接。

本科马上要毕业了，有时候会不自觉地回望：那些日复一日的课堂、推导到深夜的公式、反复修改却仍不完美的解答，还有某些瞬间——忽然理解一个定理时的安静喜悦——它们究竟会以怎样的形式，被时间保留下来？

我们留下的刻痕，会是什么呢？

是成绩单上冷静而客观的数字吗？

是写满推导的草稿纸，还是那些被反复翻阅、边角已微微卷起的教材？

又或者，是某种更难以言说的东西——一种逐渐形成的思考方式，一种在复杂问题面前不再轻易退却的心性，一种对“理解”本身的执念。

也许真正留下的，并不是某一道题的答案，而是我们在寻找答案时，曾经抵达过的那些位置。

这本习题解答集，正是试图为这些“刻痕”提供一种可见的形式。它不仅仅是对结果的整理，更像是一种路径的重现：那些弯路、那些顿悟、那些看似微不足道却至关重要的中间步骤，都在这里被保留下来。

因此，这本手册或许并不完美，它难免存在疏漏、偏见，甚至错误。但如果它能够在某一个瞬间，陪伴你跨过一道门槛，或是在你停滞时提供一点微弱却真实的光，那么它的存在，便已有意义。

我是**北京大学 23 级本科生徐博达**，如果大家发现手册中的勘误等等，可以通过如下邮箱联系我；或许你仍会烦恼，但愿你终将自由如风！

- **Email:** 2300011821@stu.pku.edu.cn, 947216434@qq.com

这个方框用于突出解答手册中的题目描述，为区分每一道习题及其对应解答提供清晰的视觉提示。

这个方框用于呈现重要引理、中间结论或关键推导过程，以辅助习题的求解。

这个方框用于提供额外说明、见解或对问题及解答的补充性解释与澄清。

目录

1 微分方程的基本概念

1.1 微分方程的定义

1. 验证下列函数是其右侧的微分方程的特解或通解，其中 c_1, c_2 为任意常数：

(1) $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x}, \quad y'' - y = 0;$

(2) $y = \frac{\sin x}{x}, \quad y' + \frac{y}{x} = \frac{\cos x}{x};$

(3) $y = c_1 e^x \cos x + c_2 e^x \sin x, \quad y'' - 2y' + 2y = 0.$

Proof. (1) 计算导数：

$$y' = c_1 e^x - c_2 e^{-x}, \quad y'' = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$$

代入方程左边：

$$y'' - y = (c_1 e^x + c_2 e^{-x}) - (c_1 e^x + c_2 e^{-x}) = 0$$

方程成立。由于解中含有两个独立的任意常数 c_1, c_2，且微分方程的阶数为 2，故为通解。

(2) 计算导数：

$$y' = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$$

代入方程左边：

$$y' + \frac{y}{x} = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} + \frac{\sin x}{x^2} = \frac{x \cos x}{x^2} = \frac{\cos x}{x}$$

方程成立。由于解中不含有任意常数，故为特解。

(3) 计算导数：

$$y' = e^x (c_1 \cos x + c_2 \sin x) + e^x (-c_1 \sin x + c_2 \cos x) = e^x [(c_1 + c_2) \cos x + (c_2 - c_1) \sin x]$$

$$y'' = e^x [(c_1 + c_2) \cos x + (c_2 - c_1) \sin x] + e^x [-(c_1 + c_2) \sin x + (c_2 - c_1) \cos x] = 2e^x (c_2 \cos x - c_1 \sin x)$$

代入方程左边：

$$\begin{aligned} y'' - 2y' + 2y &= 2e^x (c_2 \cos x - c_1 \sin x) - 2e^x [(c_1 + c_2) \cos x + (c_2 - c_1) \sin x] + 2e^x (c_1 \cos x + c_2 \sin x) \\ &= e^x [(2c_2 - 2c_1 - 2c_2 + 2c_1) \cos x + (-2c_1 - 2c_2 + 2c_1 + 2c_2) \sin x] \\ &= 0 \end{aligned}$$

方程成立。由于解中含有两个独立的任意常数 c_1, c_2，且微分方程的阶数为 2，故为通解。 □

2. 求下列初值问题的解：

(1) $\begin{cases} y''' = x, \\ y(0) = a_0, y'(0) = a_0', y''(0) = a_0'' \end{cases};$

(2) $\begin{cases} y' = x\sqrt{1 + x^2}, \\ y(0) = y_0 \end{cases}.$

Proof. (1) 对 $y''' = x$ 连续积分三次：

第一次积分得：$y'' = \frac{1}{2}x^2 + C_1$。代入初值 $y''(0) = a_0''$，得 $C_1 = a_0''$，即 $y'' = \frac{1}{2}x^2 + a_0''$。

第二次积分得：$y' = \frac{1}{6}x^3 + a_0'' x + C_2$。代入初值 $y'(0) = a_0'$，得 $C_2 = a_0'$，即 $y' = \frac{1}{6}x^3 + a_0'' x + a_0'$。

第三次积分得：$y = \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{2}a_0'' x^2 + a_0' x + C_3$。代入初值 $y(0) = a_0$，得 $C_3 = a_0$。

故初值问题的解为：

$$y = \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{2}a_0''x^2 + a_0'x + a_0$$

(2) 对 $y' = x\sqrt{1+x^2}$ 进行积分：

$$y = \int x\sqrt{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\int (1+x^2)^{\frac{1}{2}}d(1+x^2) = \frac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}} + C$$

代入初值 $y(0) = y_0$：

$$y_0 = \frac{1}{3}(1+0)^{\frac{3}{2}} + C \implies C = y_0 - \frac{1}{3}$$

故初值问题的解为：

$$y = \frac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}} + y_0 - \frac{1}{3}$$

□

3. 求曲线族 $y = c_1e^x + c_2xe^x$ 所满足的微分方程，其中 c_1, c_2 为任意常数。

Proof. 对原式两边关于 x 求导：

$$y' = c_1e^x + c_2(e^x + xe^x) = (c_1e^x + c_2xe^x) + c_2e^x = y + c_2e^x$$

即有 $c_2e^x = y' - y$。

对上式再求导一次：

$$y'' = y' + c_2e^x$$

将 $c_2e^x = y' - y$ 代入上式，得：

$$y'' = y' + (y' - y) \implies y'' - 2y' + y = 0$$

故所求的微分方程为 $y'' - 2y' + y = 0$。 □

4. 求曲线族 $c_1x + (y - c_2)^2 = 0$ 所满足的微分方程，其中 c_1, c_2 为任意常数。

Proof. 对等式两边关于 x 求导：

$$c_1 + 2(y - c_2)y' = 0 \implies c_1 = -2(y - c_2)y'$$

再次关于 x 求导：

$$0 = -2[y'^2 + (y - c_2)y''] \implies y'^2 + (y - c_2)y'' = 0$$

从中解出 $y - c_2$（假设 $y'' \neq 0$）：

$$y - c_2 = -\frac{y'^2}{y''}$$

将 $y - c_2$ 和 c_1 的表达式代回原方程 $c_1x + (y - c_2)^2 = 0$：

$$-2\left(-\frac{y'^2}{y''}\right)y' \cdot x + \left(-\frac{y'^2}{y''}\right)^2 = 0$$

化简得：

$$\frac{2xy'^3}{y''} + \frac{y'^4}{y''^2} = 0$$

假设 $y' \neq 0$，等式两边同乘 $\frac{y''^2}{y'^3}$，得到：

$$2xy'' + y' = 0$$

此即为所求的微分方程。 □

5. 求平面上一切圆所满足的微分方程。

Proof. 平面上任意圆的方程可表示为：

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$$

其中 a, b, R 均为任意常数。由于含有 3 个独立参数，我们需要求三次导数。

对 x 第一次求导：

$$2(x-a)+2(y-b)y'=0 \implies x-a+(y-b)y'=0$$

对 x 第二次求导：

$$1+y'^2+(y-b)y''=0 \implies y-b=-\frac{1+y'^2}{y''}$$

对 x 第三次求导，利用商的求导法则：

$$y'=-\frac{2y'y''\cdot y''-(1+y'^2)y'''}{(y'')^2}$$

整理得：

$$y'(y'')^2=-2y'(y'')^2+(1+y'^2)y''' \implies 3y'(y'')^2=(1+y'^2)y'''$$

即一切圆所满足的微分方程为：

$$(1+y'^2)y'''-3y'(y'')^2=0$$

□

6. 证明：设 $y=g(x;c_1,c_2,\cdots,c_n)$ 是一个充分光滑的函数族，其中 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 是相互独立的任意常数，则存在一个形如 (1.1) 式的微分方程，使得它的通解恰好是上述函数族。

Proof. 对 $y=g(x;c_1,c_2,\cdots,c_n)$ 两边关于 x 连续求导 n 次，得到如下包含 $n+1$ 个方程的方程组：

$$\begin{aligned} y &= g(x;c_1,c_2,\cdots,c_n) \\ y' &= g'(x;c_1,c_2,\cdots,c_n) \\ y'' &= g''(x;c_1,c_2,\cdots,c_n) \\ &\vdots \\ y^{(n)} &= g^{(n)}(x;c_1,c_2,\cdots,c_n) \end{aligned}$$

由于 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 是 n 个相互独立的任意常数，根据隐函数存在定理（假设满足雅可比行列式非零的非退化条件），我们可以从前 n 个方程中，将这 n 个常数 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 反解出来，用含有 $x,y,y',\cdots,y^{(n-1)}$ 的表达式表示。

将这些解出的常数表达式代入第 $n+1$ 个方程 $y^{(n)}=g^{(n)}(x;c_1,c_2,\cdots,c_n)$ 中，即可彻底消去所有的常数 $c_1,c_2,\cdots,c_n$。最终得到一个只含有 $x,y,y',\cdots,y^{(n)}$ 的关系式：

$$F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0$$

该式的形式即为形如 (1.1) 式的 n 阶微分方程。由于该方程是由原函数族及其各阶导数消去常数必然推导得出的，因此原函数族满足该微分方程。又因为原函数族中包含 n 个独立的任意常数，符合 n 阶微分方程通解的定义，故该函数族恰好是此微分方程的通解。 □

1.2 几何解释

1. 作出下面微分方程的线素场:
(1) $y' = y(y-1)$; (2) $y' = |y|$.

Proof. (1) 微分方程 $y' = y(y-1)$ 的右端仅依赖于 y。等倾线方程为 $y(y-1) = k$(常数)，即平行于 x 轴的直线。当 $y = 0$ 和 $y = 1$ 时，$y' = 0$，线素水平；当 $y > 1$ 或 $y < 0$ 时，$y' > 0$，线素斜率为正；当 $0 < y < 1$ 时，$y' < 0$，线素斜率为负。通过在不同 y 值的水平线上画出对应斜率的短线段即可作出线素场。

(2) 微分方程 $y' = |y|$ 的右端也仅依赖于 y。等倾线方程为 $|y| = k \geqslant 0$，即 $y = k$ 或 $y = -k$。当 $y = 0$ 时，$y' = 0$，线素水平；当 $y \neq 0$ 时，$y' > 0$，所有非 x 轴上的线素斜率均大于零，且关于 x 轴对称的点的线素斜率相同。 □

2. 利用线素场研究下列微分方程的积分曲线:
(1) $y' = xy$; (2) $y' = x^2 + y^2$.

Proof. (1) 等倾线方程为 $xy = k$。当 $k = 0$ 时，等倾线为坐标轴 $x = 0$ 和 $y = 0$，其上线素斜率为 0（水平）。在第一、三象限，线素斜率为正；在第二、四象限，线素斜率为负。积分曲线在过 y 轴 $(x = 0)$ 时取得极值。实际上，该方程可分离变量求解为 $y = Ce^{x^2/2}$。

(2) 等倾线方程为 $x^2 + y^2 = k \geqslant 0$。等倾线是一系列以原点为圆心的同心圆。在半径为 $\sqrt{k}$ 的圆上，线素的斜率均为 k。原点处斜率为 0；距离原点越远，线素的斜率越大（越陡峭）。由于斜率始终非负，积分曲线是单调递增的。 □

3. 写出微分方程 $y' = f(x, y)$ 的解的极大值点或极小值点 (x, y) 的轨迹方程. 如何区分极大值点和极小值点?

Proof. 函数取得极值的一阶必要条件是导数为零，即 $y' = 0$。因此，解曲线极值点的轨迹方程为:

$$f(x, y) = 0$$

为了区分极大值点和极小值点，需要考虑二阶导数 y''。对原方程两边关于 x 求导得:

$$y'' = f_x(x, y) + f_y(x, y)y'$$

在极值点处，有 $y' = 0$，因此 $y'' = f_x(x, y)$。由极值的第二充分条件：若 $f_x(x, y) > 0$，即 $y'' > 0$，则该点为极小值点；若 $f_x(x, y) < 0$，即 $y'' < 0$，则该点为极大值点。 □

4. 写出微分方程 $y' = y - x^2$ 的解曲线的拐点的轨迹方程.

Proof. 解曲线的拐点满足二阶导数等于零的条件，即 $y'' = 0$。对原微分方程两边关于 x 求导:

$$y'' = y' - 2x$$

将原方程 $y' = y - x^2$ 代入上式，得到:

$$y'' = (y - x^2) - 2x = y - x^2 - 2x$$

令 $y'' = 0$，得到拐点的轨迹方程为:

$$y - x^2 - 2x = 0 \implies y = x^2 + 2x$$

□

2 初等积分法

2.1 恰当方程

判别下列方程是否为恰当方程，并对恰当方程进行求解:

1. $(4x^2y-y)\mathrm{d}x+(3x+y)\mathrm{d}y=0$
2. $(x+2y)\mathrm{d}x+(2x-y)\mathrm{d}y=0$
3. $(ax-by)\mathrm{d}x+(bx-cy)\mathrm{d}y=0 \quad (a,b,c$ 为常数)

Proof. 1. 设 $M(x,y)=4x^2y-y$，$N(x,y)=3x+y$。计算偏导数：$\frac{\partial M}{\partial y}=4x^2-1$，$\frac{\partial N}{\partial x}=3$。由于 $\frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x}$，所以该方程不是恰当方程。

2. 设 $M(x,y)=x+2y$，$N(x,y)=2x-y$。计算偏导数：$\frac{\partial M}{\partial y}=2$，$\frac{\partial N}{\partial x}=2$。由于 $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$，所以该方程是恰当方程。求解：存在函数 $u(x,y)$ 使得 $\mathrm{d}u=M\mathrm{d}x+N\mathrm{d}y$。

$$u(x,y)=\int(x+2y)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x^2+2xy+\phi(y)$$

对 y 求偏导：$\frac{\partial u}{\partial y}=2x+\phi'(y)$。令 $\frac{\partial u}{\partial y}=N(x,y)$，即 $2x+\phi'(y)=2x-y$。解得 $\phi'(y)=-y \implies \phi(y)=-\frac{1}{2}y^2$。故通解为：$\frac{1}{2}x^2+2xy-\frac{1}{2}y^2=C$。

3. 设 $M(x,y)=ax-by$，$N(x,y)=bx-cy$。计算偏导数：$\frac{\partial M}{\partial y}=-b$，$\frac{\partial N}{\partial x}=b$。一般情况下 (当 $b\neq0$ 时)，$\frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x}$，该方程不是恰当方程。 □

4. $x^2y(y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y)-(2y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y)=0$
5. $3x^2(1+\ln y)\mathrm{d}x-\left(2y-\frac{x^3}{y}\right)\mathrm{d}y=0$
6. $(2-9xy^2)x\mathrm{d}x+(4y^2-6x^3)y\mathrm{d}y=0$
7. $2x(1+\sqrt{x^2-y})\mathrm{d}x-\sqrt{x^2-y}\mathrm{d}y=0$
8. $e^{-y}\mathrm{d}x-(2y+xe^{-y})\mathrm{d}y=0$
9. $\frac{y}{x}\mathrm{d}x+(y^3+\ln x)\mathrm{d}y=0$

Proof. 4. 整理方程得：$(x^2y^2-2y)\mathrm{d}x+(x^3y-x)\mathrm{d}y=0$。设 $M=x^2y^2-2y$，$N=x^3y-x$。计算偏导数：$\frac{\partial M}{\partial y}=2x^2y-2$，$\frac{\partial N}{\partial x}=3x^2y-1$。由于 $\frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x}$，所以该方程不是恰当方程。

5. 设 $M=3x^2(1+\ln y)$，$N=-2y+\frac{x^3}{y}$。计算偏导数：$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{3x^2}{y}$，$\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{3x^2}{y}$。由于 $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$，所以该方程是恰当方程。

$$u(x,y)=\int 3x^2(1+\ln y)\mathrm{d}x=x^3(1+\ln y)+\phi(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{x^3}{y}+\phi'(y)=N=-2y+\frac{x^3}{y} \implies \phi'(y)=-2y \implies \phi(y)=-y^2$$

故通解为：$x^3(1+\ln y)-y^2=C$。

6. 整理方程得：$(2x-9x^2y^2)\mathrm{d}x+(4y^3-6x^3y)\mathrm{d}y=0$。设 $M=2x-9x^2y^2$，$N=4y^3-6x^3y$。计算偏导数：$\frac{\partial M}{\partial y}=-18x^2y$，$\frac{\partial N}{\partial x}=-18x^2y$。所以该方程是恰当方程。

$$u(x,y)=\int(2x-9x^2y^2)\mathrm{d}x=x^2-3x^3y^2+\phi(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-6x^3y+\phi'(y)=N=4y^3-6x^3y \implies \phi'(y)=4y^3 \implies \phi(y)=y^4$$

故通解为：$x^2-3x^3y^2+y^4=C$。

7. 设 $M=2x+2x\sqrt{x^2-y}$，$N=-\sqrt{x^2-y}$。计算偏导数：$\frac{\partial M}{\partial y}=2x\cdot\frac{-1}{2\sqrt{x^2-y}}=\frac{-x}{\sqrt{x^2-y}}$，$\frac{\partial N}{\partial x}=-\frac{2x}{2\sqrt{x^2-y}}=\frac{-x}{\sqrt{x^2-y}}$。所以该方程是恰当方程。这里对 y 积分更简便：

$$u(x,y)=\int-\sqrt{x^2-y}\mathrm{d}y=\frac{2}{3}(x^2-y)^{3/2}+\psi(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}(x^2-y)^{1/2}\cdot 2x+\psi'(x)=2x\sqrt{x^2-y}+\psi'(x)$$

令 $\frac{\partial u}{\partial x}=M=2x+2x\sqrt{x^2-y}$，得 $\psi'(x)=2x\implies\psi(x)=x^2$。故通解为：$x^2+\frac{2}{3}(x^2-y)^{3/2}=C$。

8. 设 $M=e^{-y}$，$N=-2y-xe^{-y}$。计算偏导数：$\frac{\partial M}{\partial y}=-e^{-y}$，$\frac{\partial N}{\partial x}=-e^{-y}$。所以该方程是恰当方程。

$$u(x,y)=\int e^{-y}\mathrm{d}x=xe^{-y}+\phi(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-xe^{-y}+\phi'(y)=N=-2y-xe^{-y}\implies\phi'(y)=-2y\implies\phi(y)=-y^2$$

故通解为：$xe^{-y}-y^2=C$。

9. 设 $M=\frac{y}{x}$，$N=y^3+\ln x$。计算偏导数：$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{1}{x}$，$\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{1}{x}$。所以该方程是恰当方程。

$$u(x,y)=\int\frac{y}{x}\mathrm{d}x=y\ln x+\phi(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\ln x+\phi'(y)=N=y^3+\ln x\implies\phi'(y)=y^3\implies\phi(y)=\frac{1}{4}y^4$$

故通解为：$y\ln x+\frac{1}{4}y^4=C$。 □

2.2 变量分离方程

1. 求下列微分方程满足所给条件的特解:

(1) $xy\mathrm{d}x+(x+1)\mathrm{d}y=0,\quad y(1)=2;$

(2) $(x^2-1)y'+2xy^2=0,\quad y(0)=1;$

(3) $xy'+y=y^2,\quad y(1)=\frac{1}{2};$

(4) $y'=\sqrt{4x+2y-1},\quad y(0)=1;$

(5) $(x+2y)y'=1,\quad y(0)=-1;$

(6) $x^2y'-\cos 2y=1,\quad y(+\infty)=\frac{9\pi}{4};$

(7) $3y^2y'+16x=2xy^3,$ 当 $x\to+\infty$ 时，$y(x)$ 有界.

Proof. (1) 将原方程分离变量，得：

$$\frac{1}{y}\mathrm{d}y=-\frac{x}{x+1}\mathrm{d}x$$

在此步骤中，假设了分母 $y\neq 0$。若 $y=0$，显然满足原微分方程，是方程的常数解。但代入初始条件 $y(1)=2\neq 0$，故舍去 $y=0$ 的情况。

对上述分离变量后的方程两边同时积分：

$$\int\frac{1}{y}\mathrm{d}y=\int\left(-1+\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x$$

$$\ln|y|=-x+\ln|x+1|+C$$

化简可得通解：

$$y = C_1(x+1)e^{-x}$$

将初始条件 $y(1)=2$ 代入：

$$2 = C_1(1+1)e^{-1} \implies C_1 = e$$

故所求特解为：

$$y = (x+1)e^{1-x}$$

(2) 将原方程分离变量，得：

$$\frac{1}{y^2}\mathrm{d}y = -\frac{2x}{x^2-1}\mathrm{d}x$$

假设了 $y \neq 0$。若 $y=0$，满足原微分方程。但初始条件为 $y(0)=1\neq 0$，故舍去 $y=0$ 的情况。

两边同时积分：

$$\int y^{-2}\mathrm{d}y = -\int \frac{2x}{x^2-1}\mathrm{d}x$$

$$-\frac{1}{y} = -\ln|x^2-1| + C$$

将初始条件 $x=0, y=1$ 代入：

$$-1 = -\ln|-1| + C \implies C = -1$$

由于在 $x=0$ 附近，有 $x^2-1<0$，即 $|x^2-1| = 1-x^2$，代回原式：

$$-\frac{1}{y} = -\ln(1-x^2) - 1$$

故所求特解为：

$$y = \frac{1}{1+\ln(1-x^2)}$$

(3) 原方程可化为 $x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y^2 - y$。分离变量得：

$$\frac{1}{y(y-1)}\mathrm{d}y = \frac{1}{x}\mathrm{d}x$$

假设了 $y\neq 0$ 且 $y \neq 1$。若 $y=0$ 或 $y=1$，均满足原微分方程。但初始条件 $y(1)=\frac{1}{2}$ 与两者均不符，故舍去。

两边利用部分分式展开并积分：

$$\int \left(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y}\right)\mathrm{d}y = \int \frac{1}{x}\mathrm{d}x$$

$$\ln\left|\frac{y-1}{y}\right| = \ln|x| + C$$

化简得通解：

$$\frac{y-1}{y} = C_1 x$$

将初始条件 $y(1)=\frac{1}{2}$ 代入：

$$\frac{1/2-1}{1/2} = C_1\cdot 1 \implies C_1 = -1$$

代回通解关系式并化简：

$$\frac{y-1}{y} = -x \implies y-1 = -xy \implies y(x+1) = 1$$

故所求特解为：

$$y = \frac{1}{x+1}$$

(4) 采用变量代换，令 $u = 4x+2y-1$，则 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 4+2y'$，即 $y' = \frac{u'-4}{2}$。代入原方程得：

$$\frac{u'-4}{2} = \sqrt{u} \implies u' = 2\sqrt{u}+4$$

分离变量得：

$$\frac{1}{\sqrt{u}+2}\mathrm{d}u = 2\mathrm{d}x$$

由于 $\sqrt{u} \geq 0$，所以分母 $\sqrt{u}+2 \geq 2 > 0$，恒不为零，无需讨论特解。

两边积分（令 $v = \sqrt{u}$，$\mathrm{d}u = 2v\mathrm{d}v$）：

$$\int \frac{2v}{v+2}\mathrm{d}v = \int 2\mathrm{d}x$$

$$2\int \left(1 - \frac{2}{v+2}\right)\mathrm{d}v = 2x + C$$

$$2(\sqrt{u} - 2\ln(\sqrt{u}+2)) = 2x + C \implies \sqrt{u} - 2\ln(\sqrt{u}+2) = x + C_1$$

将 $x = 0, y = 1$ 代入 u 的表达式，得 $u(0) = 4(0) + 2(1) - 1 = 1$。再代入积分结果：

$$\sqrt{1} - 2\ln(1+2) = 0 + C_1 \implies C_1 = 1 - 2\ln 3$$

故所求特解的隐函数方程为：

$$\sqrt{4x+2y-1} - 2\ln(\sqrt{4x+2y-1}+2) = x + 1 - 2\ln 3$$

(5) 采用变量代换，令 $u = x + 2y$，则将 x 视为自变量有 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} + 2$。原方程 $(x+2y)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1$ 可改写为 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = x + 2y$，代入代换式得：

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} - 2 = u \implies \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} = u + 2$$

分离变量得：

$$\frac{1}{u+2}\mathrm{d}u = \mathrm{d}y$$

假设了 $u+2 \neq 0$。若 $u+2=0$，即 $u=-2$，代入 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} = u+2$ 显然成立。将 $u=-2$ 还原为原变量：

$$x + 2y = -2 \implies y = -1 - \frac{x}{2}$$

检验初始条件 $y(0) = -1 - 0 = -1$，完全吻合。故直接得到特解，无需进一步计算一般积分常数。所求特解为：

$$y = -1 - \frac{x}{2}$$

(6) 原方程整理为 $x^2y' = 1 + \cos 2y = 2\cos^2 y$。分离变量得：

$$\frac{1}{\cos^2 y}\mathrm{d}y = \frac{2}{x^2}\mathrm{d}x$$

假设了 $\cos y \neq 0$。若 $\cos y = 0$，即 $y = k\pi + \frac{\pi}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$，此时 $y' = 0$，代入原方程 $0 - (-1) = 1$ 成立，为方程解。但极限 $\lim_{x\to+\infty} y(x) = \frac{9\pi}{4}$，不属于该形式，故舍去。

两边积分：

$$\int \sec^2 y\mathrm{d}y = \int 2x^{-2}\mathrm{d}x$$

$$\tan y = -\frac{2}{x} + C$$

对等式两边取 $x \to +\infty$ 的极限，利用条件 $y(+\infty) = \frac{9\pi}{4}$：

$$\tan\left(\frac{9\pi}{4}\right) = 0 + C \implies C = \tan\left(2\pi + \frac{\pi}{4}\right) = 1$$

代回得 $\tan y = 1 - \frac{2}{x}$。写出显式表达式：

$$y = \arctan\left(1 - \frac{2}{x}\right) + k\pi$$

为了满足 $x \to +\infty$ 时 $y \to \frac{9\pi}{4}$，且 $\lim_{x\to+\infty} \arctan\left(1-\frac{2}{x}\right) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$，必须取 $k=2$。故所求特解为：

$$y = \arctan\left(1-\frac{2}{x}\right) + 2\pi$$

(7) 原方程整理为 $3y^2y' = 2x(y^3-8)$。分离变量得：

$$\frac{3y^2}{y^3-8}\mathrm{d}y = 2x\mathrm{d}x$$

假设了 $y^3-8 \neq 0$。若 $y^3-8=0$，即 $y=2$，此时 $y'=0$，代入原微分方程两边均等于 $16x$，故 $y=2$ 是方程的解。并且 $y=2$ 是常数函数，显然在 $x\to+\infty$ 时有界。

若继续求通解，两边积分：

$$\int \frac{\mathrm{d}(y^3-8)}{y^3-8} = \int 2x\mathrm{d}x$$

$$\ln|y^3-8| = x^2 + C \implies y^3-8 = C_1e^{x^2} \quad (C_1 \neq 0)$$

当 $x\to+\infty$ 时，$e^{x^2}\to+\infty$，此时若 $C_1\neq 0$，必将导致 $y^3\to\pm\infty$，即 $y(x)$ 无界，这与题目要求的"当 $x\to+\infty$ 时 $y(x)$ 有界"相矛盾。因此，满足条件的解只能是先前分离变量时讨论的分母为零的特解（对应于 $C_1=0$）。故所求特解为：

$$y = 2$$

□

2. 求解下列微分方程，并作出积分曲线的草图:

(1) $y' = ay$, 其中 a 是不为零的常数;

(2) $y' = y^a$, 其中 $a = \frac{1}{5}, 1, 2.$

Proof. (1) 对于方程 $y' = ay$：

在分离变量前，首先考虑 $y=0$ 的情形。显然，代入原方程可知 $y=0$ 满足方程，是它的一个常数解。

当 $y\neq 0$ 时，分离变量可得：

$$\frac{1}{y}\mathrm{d}y = a\mathrm{d}x$$

对等式两边进行积分：

$$\int \frac{1}{y}\mathrm{d}y = \int a\mathrm{d}x$$

$$\ln|y| = ax + C_1$$

化简上述等式，得：

$$y = \pm e^{C_1}e^{ax}$$

令 $C_2 = \pm e^{C_1}$，则 C_2 为非零常数，有：

$$y = C_2e^{ax}$$

考虑到先前得到的常数解 $y=0$，可以将其纳入上式中（即令常数取 0），从而得到通解：

$$y = Ce^{ax} \quad (C \text{ 为任意常数})$$

积分曲线的草图描述： 积分曲线是一簇指数曲线。对其形态描述如下：若 $a>0$：当 $C>0$ 时，曲线位于 x 轴上方，单调递增且下凸；当 $C<0$ 时，曲线位于 x 轴下方，单调递减且上凸；当 $C=0$ 时，曲线即为 x 轴。若 $a<0$：当 $C>0$ 时，曲线位于 x 轴上方，单调递减且下凸；当 $C<0$ 时，曲线位于 x 轴下方，单调递增且上凸。

(2) 对于方程 $y' = y^a$：

情形一：当 $a=1$ 时，方程为 $y'=y$。这与 (1) 中 $a=1$ 的情况完全一致，故通解为：

$$y=Ce^{x}\quad (C\text{ 为任意常数})$$

积分曲线的草图为一簇标准的指数曲线，形态与 (1) 中 $a>0$ 的情况相同。

情形二：当 $a=2$ 时，方程为 $y'=y^2$。在分离变量前，考虑 $y=0$ 的情形。显然 $y=0$ 满足原方程，是它的一个常数解。

当 $y\neq 0$ 时，分离变量可得：

$$\frac{1}{y^2}\mathrm{d}y=\mathrm{d}x$$

对等式两边进行积分：

$$\int y^{-2}\mathrm{d}y=\int 1\mathrm{d}x$$

$$-\frac{1}{y}=x+C$$

化简得：

$$y=-\frac{1}{x+C}$$

故该方程的解为：

$$y=-\frac{1}{x+C}\quad\text{以及}\quad y=0$$

积分曲线的草图描述：$y=0$ 为 x 轴；其余积分曲线 $y=-\frac{1}{x+C}$ 是一簇平移后的反比例函数（双曲线），其垂直渐近线为 $x=-C$，水平渐近线为 $y=0$。在垂直渐近线右侧 $(x>-C)$ 曲线位于第四象限并单调递增；在左侧 $(x<-C)$ 曲线位于第二象限并单调递增。

情形三：当 $a=\frac{1}{5}$ 时，方程为 $y'=y^{1/5}$。在分离变量前，考虑 $y=0$ 的情形。显然 $y=0$ 满足原方程，是它的一个常数解。

当 $y\neq 0$ 时，分离变量可得：

$$y^{-1/5}\mathrm{d}y=\mathrm{d}x$$

对等式两边进行积分：

$$\int y^{-1/5}\mathrm{d}y=\int 1\mathrm{d}x$$

$$\frac{5}{4}y^{4/5}=x+C$$

由于对于任意实数 y 均有 $y^{4/5}\geqslant 0$，因此必须满足 $x+C\geqslant 0$，即 $x\geqslant -C$。化简解得：

$$y=\pm\left[\frac{4}{5}(x+C)\right]^{5/4}$$

故该方程的解为：

$$y=\pm\left[\frac{4}{5}(x+C)\right]^{5/4}\quad (x\geqslant -C)\quad\text{以及}\quad y=0$$

积分曲线的草图描述：$y=0$ 为 x 轴；其余积分曲线以 x 轴上的点 $(-C,0)$ 为起点，分为上下两支，分别向第一象限和第四象限延伸。由于过 x 轴上的任意一点 $(-C,0)$ 都有三条积分曲线（两支曲线和 x 轴）相交，说明在此处解是不唯一的。 □

3. 设有微分方程

$$y'=f(y),$$

其中 $f(y)$ 在 $y=a$ 的某个邻域内连续，且 $f(y)=0$ 当且仅当 $y=a$. 证明：对于直线 $y=a$ 上任一点 (x_0,a)，该方程满足条件 $y(x_0)=a$ 的解存在且唯一的充要条件为

$$\left|\int_a^{a\pm\varepsilon}\frac{1}{f(y)}\mathrm{d}y\right|=+\infty,$$

其中 ε 为任意正数.

Proof. 首先讨论解的存在性。由于题目已知当且仅当 $y=a$ 时 $f(y)=0$，因此将 $y(x)\equiv a$ 代入原微分方程，显然有 $y'=0=f(a)$，方程恒成立。并且该常数解满足初始条件 $y(x_0)=a$。因此，满足条件的特解总是存在的（即常数解 $y\equiv a$），本题的核心转化为证明该解唯一的充要条件。

若该初值问题还存在不恒等于 a 的第二组解 $y=y(x)$，则在 $y\neq a$ 的区间内，有 $f(y)\neq 0$。此时可以将原方程分离变量：

$$\frac{1}{f(y)}\mathrm{d}y=\mathrm{d}x$$

假设存在这样的非常数解 $y(x)$，它满足 $y(x_0)=a$，并且在 x_0 附近的某一点 x_1 处，解曲线偏离了直线 $y=a$ 到达 $y(x_1)=a\pm\varepsilon$ $(\varepsilon>0)$。对分离变量后的方程两边在 $[x_0,x_1]$ 对应的区间上进行积分：

$$\int_{y(x_0)}^{y(x_1)}\frac{1}{f(y)}\mathrm{d}y=\int_{x_0}^{x_1}\mathrm{d}x$$

将边界条件代入，即得到隐式积分关系：

$$\int_{a}^{a\pm\varepsilon}\frac{1}{f(y)}\mathrm{d}y=x_1-x_0$$

充分性：若 $\left|\int_a^{a\pm\varepsilon}\frac{1}{f(y)}\mathrm{d}y\right|=+\infty$，则上述等式左端趋于无穷。然而对于任何一条偏离了 $y=a$ 的解曲线，如果要从点 (x_0,a) 变动到 $(x_1,a\pm\varepsilon)$，等式右端的 x_1-x_0 必须是一个有限常数。无穷大等于有限常数，产生矛盾。这说明除了分离变量前讨论的常数解 $y(x)\equiv a$ 之外，不存在任何其他解，解是唯一的。

必要性：已知解是唯一的（即仅有 $y(x)\equiv a$），采用反证法。假设积分收敛，即存在正实数 M 使得：

$$\left|\int_{a}^{a\pm\varepsilon}\frac{1}{f(y)}\mathrm{d}y\right|=M<+\infty$$

则根据分离变量积分得到的等式 $\int_a^y\frac{1}{f(u)}\mathrm{d}u=x-x_0$，这本身就定义了一个 x 与 y 的函数关系。由于积分值有限，意味着只需经历有限的自变量跨度 $|x-x_0|=M$，因变量 y 就能从 a 变动到 $a\pm\varepsilon$。这就意味着从点 (x_0,a) 出发，存在一条确定的、非常数的解曲线。这与“解的唯一性”前提相矛盾。因此，反证法假设不成立，该反常积分必须发散，即绝对值为 $+\infty$。 □

4. 称函数 $f(x,y)$ 是 d 次拟齐次函数，如果

$$f(t^{\alpha s}x,t^{\beta s}y)=t^{ds}f(x,y),$$

其中 $t>0,\alpha$ 和 β 为正常数，且 $\alpha+\beta=1,s\in\mathbb{R}$. 这时 α 和 β 分别称为 x 和 y 的权. 考虑微分方程

$$P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0,$$

其中 $P(x,y)$ 和 $Q(x,y)$ 分别是 d_0 次和 d_1 次拟齐次函数，x 和 y 的权分别是 α 和 β. 证明：当

$$d_0=d_1+\beta-\alpha$$

时，该方程可以用初等积分法求解.

Proof. 借鉴齐次方程的解法，作变量代换 $y=ux^{\frac{\beta}{\alpha}}$。两边求微分，可得：

$$\mathrm{d}y=x^{\frac{\beta}{\alpha}}\mathrm{d}u+\frac{\beta}{\alpha}ux^{\frac{\beta}{\alpha}-1}\mathrm{d}x$$

利用拟齐次函数的定义，令 $t^s=x^{\frac{1}{\alpha}}$，则有 $t^{\alpha s}=x$ 以及 $t^{\beta s}=x^{\frac{\beta}{\alpha}}$。将此代入 $P(x,y)$ 和 $Q(x,y)$ 中：

$$P(x,y)=P(t^{\alpha s}\cdot 1,t^{\beta s}\cdot u)=t^{d_0 s}P(1,u)=x^{\frac{d_0}{\alpha}}P(1,u)$$

$$Q(x,y)=Q(t^{\alpha s}\cdot 1,t^{\beta s}\cdot u)=t^{d_1 s}Q(1,u)=x^{\frac{d_1}{\alpha}}Q(1,u)$$

将 $P(x,y)$、$Q(x,y)$ 及 $\mathrm{d}y$ 的表达式代入原微分方程：

$$x^{\frac{d_0}{\alpha}}P(1,u)\mathrm{d}x + x^{\frac{d_1}{\alpha}}Q(1,u)\left(x^{\frac{\beta}{\alpha}}\mathrm{d}u + \frac{\beta}{\alpha}ux^{\frac{\beta}{\alpha}-1}\mathrm{d}x\right) = 0$$

将含 $\mathrm{d}x$ 和 $\mathrm{d}u$ 的项分别合并整理：

$$\left[x^{\frac{d_0}{\alpha}}P(1,u) + \frac{\beta}{\alpha}ux^{\frac{d_1+\beta-\alpha}{\alpha}}Q(1,u)\right]\mathrm{d}x + x^{\frac{d_1+\beta}{\alpha}}Q(1,u)\mathrm{d}u = 0$$

根据题目已知条件 $d_0 = d_1 + \beta - \alpha$，等式两边同除以 α，有：

$$\frac{d_0}{\alpha} = \frac{d_1+\beta-\alpha}{\alpha} \quad \text{且} \quad \frac{d_0}{\alpha} + 1 = \frac{d_1+\beta}{\alpha}$$

利用该条件化简微分方程中 x 的指数：

$$x^{\frac{d_0}{\alpha}}\left[P(1,u) + \frac{\beta}{\alpha}uQ(1,u)\right]\mathrm{d}x + x^{\frac{d_0}{\alpha}+1}Q(1,u)\mathrm{d}u = 0$$

假设 $x \neq 0$，方程两边同除以 $x^{\frac{d_0}{\alpha}+1}$，即可实现变量分离：

$$\frac{1}{x}\mathrm{d}x + \frac{Q(1,u)}{P(1,u) + \frac{\beta}{\alpha}uQ(1,u)}\mathrm{d}u = 0$$

此时，原方程已转化为标准的变量分离方程。只需对等式两边进行积分，即可求出隐函数形式的通解。因此，当 $d_0 = d_1 + \beta - \alpha$ 时，该微分方程可通过变量分离转化为初等积分法求解。 □

注记：变量代换的动机

借鉴求解标准齐次方程的核心思想，我们的目标是提取出 x 的幂次，将 $P(x,y)$ 和 $Q(x,y)$ 转化为形如 $x^kP(1,u)$ 的结构，以便后续分离变量。

利用拟齐次函数的定义 $f(t^{\alpha s}x, t^{\beta s}y) = t^{ds}f(x,y)$，我们希望等式左侧的第一位自变量变为 1。为此，相当于令提取因子 $t^{\alpha s} = x^{-1}$，即 $t^s = x^{-\frac{1}{\alpha}}$。将其代入定义式可得：

$$f(1, x^{-\frac{\beta}{\alpha}}y) = x^{-\frac{d}{\alpha}}f(x,y) \implies f(x,y) = x^{\frac{d}{\alpha}}f\left(1, yx^{-\frac{\beta}{\alpha}}\right)$$

为了让第二位自变量凑成单一变量 u，自然想到令 $u = yx^{-\frac{\beta}{\alpha}}$，这就直接启发了变量代换：

$$y = ux^{\frac{\beta}{\alpha}}$$

5. 证明：方程

$$y' = \sqrt[3]{\frac{y^2+1}{x^4+1}}$$

的每一条积分曲线都有两条水平渐近线.

Proof. 对原微分方程分离变量，得：

$$(y^2+1)^{-\frac{1}{3}}\mathrm{d}y = (x^4+1)^{-\frac{1}{3}}\mathrm{d}x$$

由于对任意实数 y 均有 $y^2 + 1 \geqslant 1 > 0$，故在此分离变量的过程中除数恒不为零，不存在遗漏常数解的情况。

设积分曲线经过任意初始点 (x_0, y_0)，对等式两边在对应的区间上进行定积分：

$$\int_{y_0}^{y(x)}(u^2+1)^{-\frac{1}{3}}\mathrm{d}u = \int_{x_0}^{x}(t^4+1)^{-\frac{1}{3}}\mathrm{d}t$$

为方便分析，定义函数 $F(y) = \int_0^y(u^2+1)^{-\frac{1}{3}}\mathrm{d}u$ 以及 $G(x) = \int_0^x(t^4+1)^{-\frac{1}{3}}\mathrm{d}t$。则上述积分关系可表示为：

$$F(y(x)) - F(y_0) = G(x) - G(x_0) \implies F(y(x)) = G(x) - G(x_0) + F(y_0)$$

首先分析等式右侧 $G(x)$ 的渐近性质：当 $t\to\infty$ 时，被积函数 $(t^4+1)^{-\frac{1}{3}}\sim t^{-\frac{4}{3}}$。由于 $\frac{4}{3}>1$，根据无穷区间反常积分的敛散性判别法，积分 $\int_0^{+\infty}(t^4+1)^{-\frac{1}{3}}\mathrm{d}t$ 收敛。设该收敛值为有限正常数 M。又由于被积函数是偶函数，故有：

$$\lim_{x\to+\infty}G(x)=M,\quad \lim_{x\to-\infty}G(x)=-M$$

这表明当 $x\to\pm\infty$ 时，等式右侧 $G(x)-G(x_0)+F(y_0)$ 分别趋于有限常数。我们将其分别记为 C_+ 和 C_-。

其次分析等式左侧 $F(y)$ 的性质：当 $u\to\infty$ 时，被积函数 $(u^2+1)^{-\frac{1}{3}}\sim u^{-\frac{2}{3}}$。由于 $\frac{2}{3}\leqslant 1$，反常积分 $\int_0^{+\infty}(u^2+1)^{-\frac{1}{3}}\mathrm{d}u$ 发散至 $+\infty$；同理向负无穷方向发散至 $-\infty$。又因为对于任意 $u\in\mathbb{R}$，导数 $F'(u)=(u^2+1)^{-\frac{1}{3}}>0$ 恒成立，所以 $F(y)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的严格单调递增函数，且其值域为整个实数集 $\mathbb{R}$。因此，$F(y)$ 存在定义在整个 $\mathbb{R}$ 上的连续逆函数 F^{-1}。

综上所述，积分曲线的隐函数可以显式表示为：

$$y(x)=F^{-1}(G(x)-G(x_0)+F(y_0))$$

对两边取极限：

$$\lim_{x\to+\infty}y(x)=F^{-1}(C_+),\quad \lim_{x\to-\infty}y(x)=F^{-1}(C_-)$$

由于 F^{-1} 在实数域上处处连续，且 C_+ 与 C_- 均为有限实数，因此这两个极限均存在且为有限实数。又因为 $y'>0$ 恒成立，积分曲线严格单调递增，故向两端趋近的极限值互不相等。因此，该微分方程的每一条积分曲线都必然存在两条不同的水平渐近线。 □

6. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上连续，且为正的. 证明: 如果

$$\int_1^x f(t)\mathrm{d}t\leqslant (f(x))^3,$$

则

$$f(x)\geqslant\sqrt{\frac{2}{3}(x-1)}.$$

Proof. 令 $F(x)=\int_1^x f(t)\mathrm{d}t$。因为 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上连续，由微积分基本定理可知 $F(x)$ 可导，且 $F'(x)=f(x)$。又因为 $f(x)$ 为正，所以当 $x>1$ 时，$F(x)>F(1)=0$。

根据题设条件，给定的积分不等式可化为：

$$F(x)\leqslant (F'(x))^3$$

由于 $f(x)>0$，即 $F'(x)>0$，对不等式两边同时开三次方得：

$$(F(x))^{\frac{1}{3}}\leqslant F'(x)$$

当 $x>1$ 时，$F(x)>0$。采用类似分离变量的思想，将含 F 的项移至同侧：

$$(F(x))^{-\frac{1}{3}}F'(x)\geqslant 1$$

对上述不等式两边在区间 $[1,x]$ 上进行定积分：

$$\int_1^x (F(t))^{-\frac{1}{3}}F'(t)\mathrm{d}t\geqslant\int_1^x 1\mathrm{d}t$$

$$\int_1^x (F(t))^{-\frac{1}{3}}\mathrm{d}(F(t))\geqslant x-1$$

计算左侧的积分得：

$$\left[\frac{3}{2}(F(t))^{\frac{2}{3}}\right]_1^x\geqslant x-1$$

代入上下限，并利用 $F(1)=0$，可得：

$$\frac{3}{2}(F(x))^{\frac{2}{3}}-0\geqslant x-1$$

整理得：

$$(F(x))^{\frac{2}{3}} \geqslant \frac{2}{3}(x-1)$$

另一方面，回到原题干已知条件 $F(x) \leqslant (f(x))^3$。因为 $f(x)$ 与 $F(x)$ 均为正数，结合上述两个关于 $(F(x))^2$ 的不等式，利用传递性可得：

$$(f(x))^6 \geqslant (F(x))^2 \geqslant \left[\frac{2}{3}(x-1)\right]^3$$

即：

$$f(x) \geqslant \sqrt{\frac{2}{3}(x-1)}$$

结论得证。 □

2.3 一阶线性微分方程

1. 求解下列微分方程：

(1) $xy' - 2y = 2x^4$;

(2) $(2x+1)y' = 4x + 2y$;

(3) $(xy + e^x)\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y = 0$;

(4) $2x(x^2+y)\mathrm{d}x = \mathrm{d}y$;

(5) $(1-2xy)y' = y(y-1)$.

Proof. (1) 假设 $x \neq 0$。将方程两边同除以 x，化为标准一阶线性微分方程：

$$y' - \frac{2}{x}y = 2x^3$$

计算积分因子：

$$\mu(x) = e^{\int -\frac{2}{x}\mathrm{d}x} = e^{-2\ln|x|} = \frac{1}{x^2}$$

方程两边同乘 $\frac{1}{x^2}$，得：

$$\frac{1}{x^2}y' - \frac{2}{x^3}y = 2x \implies \left(\frac{y}{x^2}\right)' = 2x$$

两边同时积分：

$$\frac{y}{x^2} = x^2 + C$$

化简得通解：

$$y = x^4 + Cx^2$$

若 $x = 0$，代入原方程得到 $-2y = 0 \implies y = 0$。上述通解在 $x = 0$ 处满足 $y = 0$ 且可导，故无需额外补充。

(2) 假设 $2x + 1 \neq 0$。将方程化为标准形式：

$$y' - \frac{2}{2x+1}y = \frac{4x}{2x+1}$$

计算积分因子：

$$\mu(x) = e^{\int -\frac{2}{2x+1}\mathrm{d}x} = e^{-\ln|2x+1|} = \frac{1}{|2x+1|}$$

为简便起见，等式两边同乘 $\frac{1}{2x+1}$（等价于将原方程化简并除以 $(2x+1)^2$）：

$$\frac{(2x+1)y' - 2y}{(2x+1)^2} = \frac{4x}{(2x+1)^2}$$

$$\left(\frac{y}{2x+1}\right)' = \frac{2(2x+1)-2}{(2x+1)^2} = \frac{2}{2x+1} - \frac{2}{(2x+1)^2}$$

两边同时积分：

$$\frac{y}{2x+1} = \ln|2x+1| + \frac{1}{2x+1} + C$$

化简得通解：

$$y = (2x+1)\ln|2x+1| + 1 + C(2x+1)$$

（若 $2x+1=0$ 即 $x=-\frac{1}{2}$，代入原方程得 $y=1$，通解亦包含此情形。）

(3) 假设 $x \neq 0$。将方程整理为标准的一阶线性形式：

$$x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - xy = e^x \implies y' - y = \frac{e^x}{x}$$

计算积分因子：

$$\mu(x) = e^{\int -1\mathrm{d}x} = e^{-x}$$

方程两边同乘 e^{-x}：

$$e^{-x}y' - e^{-x}y = \frac{1}{x} \implies (e^{-x}y)' = \frac{1}{x}$$

两边同时积分：

$$e^{-x}y = \ln|x| + C$$

化简得通解：

$$y = e^x(\ln|x| + C)$$

以及特解 $x \equiv 0$.

(4) 整理原方程，化为关于未知函数 y 的一阶线性形式：

$$y' - 2xy = 2x^3$$

计算积分因子：

$$\mu(x) = e^{\int -2x\mathrm{d}x} = e^{-x^2}$$

方程两边同乘 e^{-x^2}：

$$e^{-x^2}y' - 2xe^{-x^2}y = 2x^3e^{-x^2} \implies (e^{-x^2}y)' = 2x^3e^{-x^2}$$

两边同时积分，右端使用分部积分法：

$$\int 2x^3e^{-x^2}\mathrm{d}x = -\int x^2\mathrm{d}(e^{-x^2}) = -x^2e^{-x^2} + \int 2xe^{-x^2}\mathrm{d}x = -x^2e^{-x^2} - e^{-x^2} + C$$

代回原式：

$$e^{-x^2}y = -(x^2+1)e^{-x^2} + C$$

化简得通解：

$$y = Ce^{x^2} - x^2 - 1$$

(5) 观察到方程关于 y 是非线性的，但关于 x 是线性的。将 x 视作关于 y 的未知函数，方程化为：

$$y(y-1)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} + 2yx = 1$$

假设 $y \neq 0$ 且 $y \neq 1$。若 $y=0$ 或 $y=1$，原方程两端均恒为 0，故此两者均为常数解。

当 $y \neq 0$ 且 $y \neq 1$ 时，同除以 $y(y-1)$ 得到标准形式：

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} + \frac{2}{y-1}x = \frac{1}{y(y-1)}$$

计算积分因子：

$$\mu(y) = e^{\int \frac{2}{y-1}\mathrm{d}y} = e^{2\ln|y-1|} = (y-1)^2$$

方程两边同乘 $(y-1)^2$：

$$(y-1)^2\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}+2(y-1)x=\frac{y-1}{y}\implies\left(x(y-1)^2\right)'=1-\frac{1}{y}$$

两边对 y 进行积分：

$$x(y-1)^2=y-\ln|y|+C$$

化简得到通解表达式。综上所述，原方程的解为：

$$x=\frac{y-\ln|y|+C}{(y-1)^2}\quad\text{以及}\quad y=0,\quad y=1$$

□

2. 求出微分方程

$$y'\sin 2x=2(y+\cos x)$$

的当 $x\to\frac{\pi}{2}$ 时仍有界的解.

Proof. 将原微分方程整理为一阶线性微分方程的标准形式。在 $x\to\frac{\pi}{2}$ 的去心邻域内，$\sin 2x\neq 0$。将方程两边同除以 $\sin 2x$：

$$y'-\frac{2}{\sin 2x}y=\frac{2\cos x}{\sin 2x}$$

利用二倍角公式化简等式右端：

$$y'-\frac{2}{\sin 2x}y=\frac{1}{\sin x}$$

求该一阶线性微分方程的积分因子：

$$\mu(x)=\exp\left(\int-\frac{2}{\sin 2x}\mathrm{d}x\right)$$

计算该不定积分：

$$\int-\frac{2}{\sin 2x}\mathrm{d}x=-\int\frac{1}{\sin x\cos x}\mathrm{d}x=-\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x\cos x}\mathrm{d}x=-\int(\tan x+\cot x)\mathrm{d}x=\ln|\cos x|-\ln|\sin x|=\ln|\cot x|$$

故可取积分因子 $\mu(x)=\cot x$。将化简后的标准方程两边同乘 $\cot x$：

$$y'\cot x-y\frac{2\cot x}{\sin 2x}=\frac{\cot x}{\sin x}$$

化简左端 y 的系数 $\frac{2\cot x}{\sin 2x}=\frac{2\frac{\cos x}{\sin x}}{2\sin x\cos x}=\frac{1}{\sin^2 x}=\csc^2 x$，方程可改写为：

$$y'\cot x-y\csc^2 x=\frac{\cos x}{\sin^2 x}\implies(y\cot x)'=\frac{\cos x}{\sin^2 x}$$

对等式两边同时关于 x 进行积分：

$$y\cot x=\int\frac{\cos x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}(\sin x)=-\frac{1}{\sin x}+C$$

整理得到原微分方程的通解：

$$y=\frac{C-\frac{1}{\sin x}}{\cot x}=\frac{C\sin x-1}{\cos x}$$

题目要求当 $x\to\frac{\pi}{2}$ 时，解 $y(x)$ 仍有界。考察通解的极限行为：当 $x\to\frac{\pi}{2}$ 时，分母 $\cos x\to 0$。若要使整个分式的值保持有界，其分子必须同时趋于 0。

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(C\sin x-1)=C\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)-1=C-1=0\implies C=1$$

将 $C=1$ 代入通解，解得：

$$y=\frac{\sin x-1}{\cos x}$$

（经洛必达法则验证，$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x-1}{\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{-\sin x}=0$，极限值为有限实数，满足有界条件。）

故所求满足条件的解为：

$$y=\frac{\sin x-1}{\cos x}$$

□

3. 设在微分方程 $xy'+ay=f(x)$ 中，常数 $a>0$, $\lim_{x\to 0}f(x)=b$. 证明：当 $x\to 0$ 时，该方程只有一个有界的解；并求出这个解当 $x\to 0$ 时的极限.

Proof. 假设 $x\neq 0$，将原方程化为一阶线性微分方程的标准形式：

$$y'+\frac{a}{x}y=\frac{f(x)}{x}$$

计算积分因子：

$$\mu(x)=e^{\int\frac{a}{x}\mathrm{d}x}=e^{a\ln|x|}=|x|^a$$

方程两边同乘 $|x|^a$，整理可得：

$$|x|^a y'+a|x|^{a-1}\mathrm{sgn}(x)y=|x|^{a-1}\mathrm{sgn}(x)f(x)\implies(|x|^a y)'=|x|^{a-1}\mathrm{sgn}(x)f(x)$$

对上式两端从 0 到 x 进行积分。由于 $a>0$ 且 $\lim_{x\to 0}f(x)=b$ 存在，即被积函数在 0 附近局部有界，反常积分收敛，得到：

$$|x|^a y=\int_0^x|t|^{a-1}\mathrm{sgn}(t)f(t)\mathrm{d}t+C$$

化简得到通解：

$$y(x)=\frac{\int_0^x|t|^{a-1}\mathrm{sgn}(t)f(t)\mathrm{d}t+C}{|x|^a}$$

分析当 $x\to 0$ 时的有界性:因为 $a>0$,当 $x\to 0$ 时,分母 $|x|^a\to 0$。同时,变上限积分部分 $\lim_{x\to 0}\int_0^x|t|^{a-1}\mathrm{sgn}(t)f(t)\mathrm{d}t=0$。若要使 $y(x)$ 在 $x\to 0$ 时有界，其分子的极限必须为 0，即：

$$0+C=0\implies C=0$$

若 $C\neq 0$，则当 $x\to 0$ 时 $y(x)\to\infty$，解是无界的。因此，要使解在 $x\to 0$ 时有界，必须且只需取 $C=0$。这就证明了在 $x\to 0$ 时，有界的解是唯一的，且该解为：

$$y(x)=\frac{\int_0^x|t|^{a-1}\mathrm{sgn}(t)f(t)\mathrm{d}t}{|x|^a}$$

求该有界解当 $x\to 0$ 时的极限：当 $x\to 0$ 时，该解属于 $\frac{0}{0}$ 型未定式。应用洛必达法则进行求导：

$$\lim_{x\to 0}y(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x|t|^{a-1}\mathrm{sgn}(t)f(t)\mathrm{d}t}{|x|^a}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|^{a-1}\mathrm{sgn}(x)f(x)}{a|x|^{a-1}\mathrm{sgn}(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{a}$$

由于已知 $\lim_{x\to 0}f(x)=b$，故：

$$\lim_{x\to 0}y(x)=\frac{b}{a}$$

极限存在且为有限实数值，符合该解有界的结论。 □

这题考虑极限的时候如果只考虑 $x>0$ 的情况可以免去符号函数 sgn 的引入，在计算上可能更简便。

4. 求出微分方程 $y'=2y\cos^2 x-\sin x$ 的周期解.

Proof. 将原微分方程整理为一阶线性微分方程的标准形式：

$$y' - (2\cos^2 x)y = -\sin x$$

计算该方程的积分因子：

$$\mu(x) = \exp\left(\int -2\cos^2 x \mathrm{d}x\right) = \exp\left(\int -(1+\cos 2x)\mathrm{d}x\right) = e^{-x-\frac{1}{2}\sin 2x}$$

将方程两边同乘积分因子 $e^{-x-\frac{1}{2}\sin 2x}$，可化为：

$$\left(ye^{-x-\frac{1}{2}\sin 2x}\right)' = -\sin xe^{-x-\frac{1}{2}\sin 2x}$$

对方程两端在区间 $[x, x+2\pi]$ 上进行定积分：

$$\left[y(t)e^{-t-\frac{1}{2}\sin 2t}\right]_x^{x+2\pi} = \int_x^{x+2\pi} -\sin te^{-t-\frac{1}{2}\sin 2t}\mathrm{d}t$$

即：

$$y(x+2\pi)e^{-(x+2\pi)-\frac{1}{2}\sin 2(x+2\pi)} - y(x)e^{-x-\frac{1}{2}\sin 2x} = -\int_x^{x+2\pi} \sin te^{-t-\frac{1}{2}\sin 2t}\mathrm{d}t$$

利用三角函数的周期性 $\sin 2(x+2\pi) = \sin 2x$，上式左端可提取公因子并化简为：

$$y(x+2\pi)e^{-2\pi}e^{-x-\frac{1}{2}\sin 2x} - y(x)e^{-x-\frac{1}{2}\sin 2x}$$

假设 $y(x)$ 是该方程的周期解。由于原方程中齐次部分的系数 $-2\cos^2 x$ 的周期为 π，非齐次项 $-\sin x$ 的周期为 2π，因此系统的公共周期为 2π。由周期解的定义，必须满足 $y(x+2\pi) = y(x)$。代入上式得：

$$y(x)e^{-x-\frac{1}{2}\sin 2x}(e^{-2\pi} - 1) = -\int_x^{x+2\pi} \sin te^{-t-\frac{1}{2}\sin 2t}\mathrm{d}t$$

将 $y(x)$ 解出，即可得到原微分方程的唯一周期解：

$$y(x) = \frac{e^{x+\frac{1}{2}\sin 2x}}{1-e^{-2\pi}} \int_x^{x+2\pi} \sin te^{-t-\frac{1}{2}\sin 2t}\mathrm{d}t$$

（若作变量代换 $t = x+s$，该形式也可等价写为 $y(x) = \frac{1}{1-e^{-2\pi}} \int_0^{2\pi} \sin(x+s)e^{-s+\frac{1}{2}[\sin 2x - \sin 2(x+s)]}\mathrm{d}s$ ） □

注记：关于周期解的说明

微分方程的周期解是指满足周期函数定义的解 $y(x)$，即存在常数 $T > 0$，使得对于定义域内的任意 x，均有 $y(x+T) = y(x)$。

对于一阶线性微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$，若 $p(x)$ 与 $q(x)$ 为连续函数且具有公共周期 T，则该方程若存在周期解，其周期通常为 T。在本题中，方程整理为 $y' - (2\cos^2 x)y = -\sin x$ 后，$p(x) = -2\cos^2 x$ 的周期为 π，$q(x) = -\sin x$ 的周期为 2π，二者的公共周期为 $T = 2\pi$。

因此，在求解过程中，我们利用周期解必须满足的条件 $y(x+2\pi) = y(x)$，建立等式以确定通解中产生的积分常数，从而求出该方程唯一的周期解。

5. 假设连续函数 $f(t)$ 满足 $|f(t)| \leqslant M, t \in \mathbb{R}$. 证明: 微分方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + x = f(t)$$

在 $-\infty < t < +\infty$ 上只有一个有界解; 进一步, 如果 $f(t)$ 是周期函数, 那么这个有界解也是周期的.

Proof. 原微分方程是一阶线性微分方程。计算其积分因子：

$$\mu(t) = e^{\int 1\mathrm{d}t} = e^t$$

方程两边同乘 e^t，化为：

$$e^t \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + e^t x = e^t f(t) \implies (e^t x)' = e^t f(t)$$

由于已知 $|f(t)| \leqslant M$，反常积分 $\int_{-\infty}^t e^s f(s)\mathrm{d}s$ 是绝对收敛的。因此，我们可以将积分下限取为 $-\infty$，求得通解的形式：

$$e^t x(t) = C + \int_{-\infty}^t e^s f(s)\mathrm{d}s$$

两边同乘 e^{-t}，得到通解表达式：

$$x(t) = Ce^{-t} + \int_{-\infty}^t e^{s-t} f(s)\mathrm{d}s$$

首先分析特解 $x^*(t) = \int_{-\infty}^t e^{s-t} f(s)\mathrm{d}s$ 的有界性：

$$|x^*(t)| = \left| \int_{-\infty}^t e^{s-t} f(s)\mathrm{d}s \right| \leqslant \int_{-\infty}^t e^{s-t} |f(s)|\mathrm{d}s \leqslant M \int_{-\infty}^t e^{s-t}\mathrm{d}s = M \left[e^{s-t} \right]_{-\infty}^t = M$$

由此可知，$x^*(t)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有界，且界为 M。

接下来讨论通解 $x(t) = Ce^{-t} + x^*(t)$ 的有界性：当 $t \to -\infty$ 时，$e^{-t} \to +\infty$。若常数 $C \neq 0$，则 Ce^{-t} 无界。由于 $x^*(t)$ 是有界的，两者相加必然导致解 $x(t)$ 在 $t \to -\infty$ 时无界。因此，若要求 $x(t)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有界，必须且只需取 $C = 0$。这就证明了该微分方程在整个实数轴上存在唯一的一个有界解，即：

$$x(t) = \int_{-\infty}^t e^{s-t} f(s)\mathrm{d}s$$

进一步证明周期性：假设 $f(t)$ 是周期函数，设其周期为 $T > 0$，即对任意 t 均有 $f(t+T) = f(t)$。将 $t+T$ 代入上述有界解的表达式中：

$$x(t+T) = \int_{-\infty}^{t+T} e^{s-(t+T)} f(s)\mathrm{d}s$$

作变量代换，令 $u = s - T$，则 $\mathrm{d}s = \mathrm{d}u$。当 $s \to -\infty$ 时，$u \to -\infty$；当 $s = t + T$ 时，$u = t$。代入积分得：

$$x(t+T) = \int_{-\infty}^t e^{(u+T)-(t+T)} f(u+T)\mathrm{d}u$$

化简指数并利用 $f(t)$ 的周期性 $f(u+T) = f(u)$：

$$x(t+T) = \int_{-\infty}^t e^{u-t} f(u)\mathrm{d}u = x(t)$$

这说明有界解 $x(t)$ 也满足 $x(t+T) = x(t)$，即该有界解同样是周期函数。命题得证。 □

6. 证明：微分方程 $xy' - (2x^2+1)y = x^2$ 只有一个解，满足当 $x \to +\infty$ 时有极限; 求出这个极限，并用积分表示这个解.

Proof. 考虑当 $x \to +\infty$ 的情形，不妨设 $x > 0$。将微分方程化为一阶线性微分方程的标准形式：

$$y' - \left(2x + \frac{1}{x}\right) y = x$$

计算该方程的积分因子：

$$\mu(x) = \exp\left(\int -\left(2x + \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x \right) = \exp(-x^2 - \ln x) = \frac{1}{x} e^{-x^2}$$

将方程两边同乘积分因子 $\frac{1}{x}e^{-x^2}$，得：

$$\frac{1}{x} e^{-x^2} y' - \frac{2x^2+1}{x^2} e^{-x^2} y = e^{-x^2} \implies \left(\frac{1}{x} e^{-x^2} y \right)' = e^{-x^2}$$

对方程两端从 0 到 x 进行定积分：

$$\frac{1}{x} e^{-x^2} y = \int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t + C$$

从而得到原方程的通解表达式：

$$y(x) = xe^{x^2}\left(\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t + C\right) = \frac{\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t + C}{\frac{1}{x}e^{-x^2}}$$

接下来分析当 $x \to +\infty$ 时的极限行为。显然，分母部分 $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}e^{-x^2} = 0$。若要使得解 $y(x)$ 当 $x \to +\infty$ 时存在有限的极限，其分子当 $x \to +\infty$ 时的极限必须为 0。已知高斯积分的结论 $\lim_{x\to+\infty}\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$，故必须满足：

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} + C = 0 \implies C = -\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

若 $C \neq -\frac{\sqrt{\pi}}{2}$，则分子的极限不为 0，而分母趋于 0，将导致 $y(x)$ 趋于无穷大，无极限。因此，满足条件的解是唯一的，且对应的常数被唯一确定为 $C = -\frac{\sqrt{\pi}}{2}$。

将 $C = -\frac{\sqrt{\pi}}{2} = -\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t$ 代回通解中，可将该唯一解用积分表示为：

$$y(x) = xe^{x^2}\left(\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t - \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t\right) = -xe^{x^2}\int_x^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t$$

最后，计算该解当 $x \to +\infty$ 时的极限。此时该极限属于 $\frac{0}{0}$ 型未定式，应用洛必达法则，对分子分母同时求导：

$$\lim_{x\to+\infty} y(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{-\int_x^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t}{\frac{1}{x}e^{-x^2}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} y(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-x^2}}{-\frac{1}{x^2}e^{-x^2} - 2e^{-x^2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{-\frac{1}{x^2} - 2} = -\frac{1}{2}$$

故该解当 $x \to +\infty$ 时的极限为 $-\frac{1}{2}$。 □

7. 证明：若在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续可微且有界的函数 $f(x)$ 满足

$$|f(x) + f'(x)| \leqslant 1,$$

则 $|f(x)| \leqslant 1$.

Proof. 令 $g(x) = f(x) + f'(x)$。由题意可知，对于任意 $x \in \mathbb{R}$，均有 $|g(x)| \leqslant 1$。

考察一阶线性微分方程：

$$f'(x) + f(x) = g(x)$$

为其寻找积分因子：

$$\mu(x) = e^{\int 1\mathrm{d}x} = e^x$$

将方程两边同乘 e^x，得到：

$$e^x f'(x) + e^x f(x) = e^x g(x) \implies (e^x f(x))' = e^x g(x)$$

对于任意实数 x 和 a（设 $a < x$），在区间 $[a, x]$ 上对上式两端进行定积分：

$$\int_a^x (e^t f(t))'\mathrm{d}t = \int_a^x e^t g(t)\mathrm{d}t$$

$$e^x f(x) - e^a f(a) = \int_a^x e^t g(t)\mathrm{d}t$$

两边同乘 e^{-x}，解出 $f(x)$ 的表达式：

$$f(x) = f(a)e^{a-x} + e^{-x}\int_a^x e^t g(t)\mathrm{d}t$$

对等式两边取绝对值，并利用绝对值不等式与积分不等式（绝对值的积分大于等于积分的绝对值）：

$$\begin{aligned}|f(x)| &= \left|f(a)e^{a-x} + e^{-x}\int_a^x e^t g(t)\mathrm{d}t\right| \\ &\leqslant |f(a)|e^{a-x} + e^{-x}\int_a^x e^t|g(t)|\mathrm{d}t\end{aligned}$$

由于已知对于所有实数均有 $|g(t)| \leqslant 1$，可对上式进一步放缩：

$$\begin{aligned}|f(x)| &\leqslant |f(a)|e^{a-x} + e^{-x}\int_a^x e^t \cdot 1\mathrm{d}t \\ &= |f(a)|e^{a-x} + e^{-x}(e^x - e^a) \\ &= |f(a)|e^{a-x} + 1 - e^{a-x}\end{aligned}$$

因为已知 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有界，故存在常数 $M > 0$，使得对于一切实数 a 都有 $|f(a)| \leqslant M$。因此：

$$|f(x)| \leqslant Me^{a-x} + 1 - e^{a-x}$$

由于上述不等式对于任意实数 $a < x$ 均成立，我们可以让 $a \to -\infty$。此时 $a - x \to -\infty$，从而 $e^{a-x} \to 0$。对不等式两端取极限：

$$|f(x)| \leqslant \lim_{a\to-\infty}\left(Me^{a-x} + 1 - e^{a-x}\right) = 0 + 1 - 0 = 1$$

因此，对于任意 $x \in (-\infty, +\infty)$，均有 $|f(x)| \leqslant 1$，结论得证。 □

2.4 积分因子

1. 求下列微分方程的解：

(1) $(x^2 + y^2 + x)\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y = 0$;

(2) $(x^2 + y^2 + y)\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y = 0$;

(3) $y\mathrm{d}y = (x\mathrm{d}y + y\mathrm{d}x)\sqrt{1 + y^2}$;

(4) $y^2\mathrm{d}x - (xy + x^3)\mathrm{d}y = 0$;

(5) $y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y = 2x^3\tan\frac{y}{x}\mathrm{d}x$;

(6) $xy\mathrm{d}x = (y^3 + x^2y + x^2)\mathrm{d}y$;

(7) $(x^2 - y^2 + y)\mathrm{d}x + x(2y - 1)\mathrm{d}y = 0$;

(8) $y^2(y\mathrm{d}x - 2x\mathrm{d}y) = x^3(x\mathrm{d}y - 2y\mathrm{d}x)$.

Proof. (1) 设 $P = x^2 + y^2 + x$，$Q = y$。计算偏导数：

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$$

计算 G：

$$G = -\frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{Q} = \frac{2y}{y} = 2$$

由于 G 仅依赖于 x，存在积分因子 $\mu(x) = e^{\int 2\mathrm{d}x} = e^{2x}$。方程两边同乘 e^{2x}：

$$e^{2x}(x^2 + y^2 + x)\mathrm{d}x + e^{2x}y\mathrm{d}y = 0$$

凑微分：

$$e^{2x}(x^2 + x)\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\mathrm{d}(y^2e^{2x}) = 0$$

两边积分（第一项利用分部积分法）：

$$\frac{1}{2}x^2e^{2x}+\frac{1}{2}y^2e^{2x}=C_1$$

化简得通解：

$$e^{2x}(x^2+y^2)=C$$

(2) 将方程改写为：

$$(x^2+y^2)\mathrm{d}x+(y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y)=0$$

假设 $x^2+y^2\neq 0$，两边同除以 x^2+y^2：

$$\mathrm{d}x+\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=0$$

利用 $\mathrm{d}(\arctan\frac{y}{x})=\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$，代入上式得：

$$\mathrm{d}x-\mathrm{d}\left(\arctan\frac{y}{x}\right)=0$$

两边积分得通解：

$$x-\arctan\frac{y}{x}=C$$

(3) 由于对于任意实数 y 均有 $\sqrt{1+y^2}\geqslant 1>0$，将原方程两边同除以 $\sqrt{1+y^2}$：

$$\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}\mathrm{d}y=x\mathrm{d}y+y\mathrm{d}x$$

凑微分得：

$$\mathrm{d}(\sqrt{1+y^2})=\mathrm{d}(xy)$$

两边积分得通解：

$$\sqrt{1+y^2}-xy=C$$

(4) 显然 $x=0$ 满足方程，是它的一个特解。当 $x\neq 0$ 时，设 $P=y^2$，$Q=-xy-x^3$。计算偏导数：

$$\frac{\partial P}{\partial y}=2y,\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=-y-3x^2$$

计算 G：

$$G=-\frac{\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}}{Q}=-\frac{-y-3x^2-2y}{-x(y+x^2)}=-\frac{3}{x}$$

存在仅依赖于 x 的积分因子 $\mu(x)=e^{\int -\frac{3}{x}\mathrm{d}x}=\frac{1}{x^3}$。方程两边同乘 $\frac{1}{x^3}$：

$$\frac{y^2}{x^3}\mathrm{d}x-\left(\frac{y}{x^2}+1\right)\mathrm{d}y=0\implies\left(\frac{y^2}{x^3}\mathrm{d}x-\frac{y}{x^2}\mathrm{d}y\right)-\mathrm{d}y=0$$

凑微分：

$$-\mathrm{d}\left(\frac{y^2}{2x^2}\right)-\mathrm{d}y=0$$

两边积分得通解。综上，该方程的解为：

$$\frac{y^2}{2x^2}+y=C\quad \text{以及}\quad x=0$$

(5) 假设 $x\neq 0$。方程整理并两边同除以 x^2：

$$\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{x^2}=2x\tan\frac{y}{x}\mathrm{d}x\implies -\mathrm{d}\left(\frac{y}{x}\right)=2x\tan\frac{y}{x}\mathrm{d}x$$

若 $\tan\frac{y}{x}=0$，即 $y=k\pi x$ $(k\in\mathbb{Z})$，代入原方程恒成立，为特解。当 $\tan\frac{y}{x}\neq 0$ 时，分离变量：

$$-\cot\frac{y}{x}\mathrm{d}\left(\frac{y}{x}\right)=2x\mathrm{d}x$$

两边积分：
$$-\ln\left|\sin\frac{y}{x}\right| = x^2 + C_1 \implies \sin\frac{y}{x} = Ce^{-x^2}$$
该通解已包含前述特解（令 $C=0$），故解为：
$$\sin\frac{y}{x} = Ce^{-x^2}$$

(6) 显然 $y=0$ 满足方程，是它的一个特解。当 $y\neq 0$ 时，将方程整理为 $xy\mathrm{d}x-(y^3+x^2y+x^2)\mathrm{d}y=0$。设 $P=xy$，$Q=-y^3-x^2y-x^2$。计算偏导数：
$$\frac{\partial P}{\partial y} = x, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -2xy-2x$$
计算 H：
$$H = \frac{\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}}{P} = \frac{-2xy-3x}{xy} = -\frac{2y+3}{y} = -2-\frac{3}{y}$$
存在仅依赖于 y 的积分因子 $\mu(y)=e^{\int\left(-2-\frac{3}{y}\right)\mathrm{d}y}=y^{-3}e^{-2y}$。方程两边同乘 $\mu(y)$：
$$xy^{-2}e^{-2y}\mathrm{d}x-(1+x^2y^{-2}+x^2y^{-3})e^{-2y}\mathrm{d}y=0$$
对 P^* 关于 x 积分：
$$u(x,y)=\int xy^{-2}e^{-2y}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x^2y^{-2}e^{-2y}+\phi(y)$$
对 y 求偏导并令其等于 Q^*：
$$\frac{\partial u}{\partial y}=-x^2y^{-3}e^{-2y}-x^2y^{-2}e^{-2y}+\phi'(y)=-e^{-2y}-x^2y^{-2}e^{-2y}-x^2y^{-3}e^{-2y}$$
解得 $\phi'(y)=-e^{-2y}$，故 $\phi(y)=\frac{1}{2}e^{-2y}$。得到 $\frac{1}{2}x^2y^{-2}e^{-2y}+\frac{1}{2}e^{-2y}=C_1$。综上，该方程的解为：
$$e^{-2y}(x^2y^{-2}+1)=C \quad \text{以及} \quad y=0$$

(7) 显然 $x=0$ 满足方程，是它的一个特解。当 $x\neq 0$ 时，设 $P=x^2-y^2+y$，$Q=x(2y-1)$。计算偏导数：
$$\frac{\partial P}{\partial y}=-2y+1, \quad \frac{\partial Q}{\partial x}=2y-1$$
计算 G：
$$G=-\frac{\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}}{Q}=-\frac{2y-1-(-2y+1)}{x(2y-1)}=-\frac{2}{x}$$
积分因子为 $\mu(x)=\frac{1}{x^2}$。方程两边同乘 $\frac{1}{x^2}$：
$$\left(1-\frac{y^2-y}{x^2}\right)\mathrm{d}x+\frac{2y-1}{x}\mathrm{d}y=0 \implies \mathrm{d}x+\frac{(2y-1)x\mathrm{d}y-(y^2-y)\mathrm{d}x}{x^2}=0$$
凑微分：
$$\mathrm{d}x+\mathrm{d}\left(\frac{y^2-y}{x}\right)=0$$
两边积分得通解。综上，该方程的解为：
$$x+\frac{y^2-y}{x}=C \quad \text{以及} \quad x=0$$

(8) 将方程展开并整理为标准形式：
$$(y^3+2x^3y)\mathrm{d}x-(2xy^2+x^4)\mathrm{d}y=0$$
显然 $x=0$ 及 $y=0$ 均满足方程，是它的两个特解。当 $x\neq 0$ 且 $y\neq 0$ 时，寻找形如 $\mu(x,y)=x^my^n$ 的积分因子。方程两边同乘 x^my^n：
$$(x^my^{n+3}+2x^{m+3}y^{n+1})\mathrm{d}x-(x^{m+4}y^n+2x^{m+1}y^{n+2})\mathrm{d}y=0$$

为使其成为恰当方程，需满足 $\frac{\partial P^*}{\partial y} = \frac{\partial Q^*}{\partial x}$：

$$(n+3)x^m y^{n+2} + 2(n+1)x^{m+3}y^n = -(m+4)x^{m+3}y^n - 2(m+1)x^m y^{n+2}$$

对应项系数相等，得到方程组：

$$\begin{cases} n+3 = -2(m+1) \\ 2(n+1) = -(m+4) \end{cases} \implies \begin{cases} 2m+n = -5 \\ m+2n = -6 \end{cases}$$

解得 $m = -\frac{4}{3}, n = -\frac{7}{3}$。此时积分因子为 $\mu = x^{-\frac{4}{3}}y^{-\frac{7}{3}}$。代回恰当方程，有：

$$P^* = x^{-\frac{4}{3}}y^{\frac{2}{3}} + 2x^{\frac{5}{3}}y^{-\frac{4}{3}}, \quad Q^* = -x^{\frac{8}{3}}y^{-\frac{7}{3}} - 2x^{-\frac{1}{3}}y^{-\frac{1}{3}}$$

对 P^* 关于 x 积分：

$$u(x,y) = \int P^* \mathrm{d}x = -3x^{-\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}} + \frac{3}{4}x^{\frac{8}{3}}y^{-\frac{4}{3}} + \phi(y)$$

对 y 求偏导并令其等于 Q^*：

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2x^{-\frac{1}{3}}y^{-\frac{1}{3}} - x^{\frac{8}{3}}y^{-\frac{7}{3}} + \phi'(y) = Q^* \implies \phi'(y) = 0$$

故 $\phi(y) = 0$，通解为 $-3x^{-\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}} + \frac{3}{4}x^{\frac{8}{3}}y^{-\frac{4}{3}} = C_1$。等式两端同乘 $-\frac{4}{3}$ 整理。综上，该方程的解为：

$$4x^{-\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{8}{3}}y^{-\frac{4}{3}} = C \quad \text{以及} \quad x = 0, \quad y = 0$$

□

2. 证明：方程 $P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = 0$ 有形如 $\mu = \mu(\phi(x,y))$ 的积分因子的充要条件是

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q\frac{\partial \phi}{\partial x} - P\frac{\partial \phi}{\partial y}} = f(\phi(x,y)),$$

其中 f 为某个一元函数. 应用这一结果，给出存在下列类型的积分因子的充要条件：

(1) $\mu = \mu(x \pm y)$;

(2) $\mu = \mu(x^2 + y^2)$;

(3) $\mu = \mu(xy)$;

(4) $\mu = \mu(x^\alpha y^\beta)$ (α, β 为常数).

Proof. **第一部分：证明充要条件**

若 $\mu = \mu(\phi(x,y))$ 是微分方程 $P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = 0$ 的积分因子，则方程 $\mu P\mathrm{d}x + \mu Q\mathrm{d}y = 0$ 为恰当方程。根据恰当方程的充要条件，有：

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}$$

利用乘积求导法则和复合函数求导法则展开上式：

$$\frac{\partial \mu}{\partial y}P + \mu\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial x}Q + \mu\frac{\partial Q}{\partial x}$$

由于 $\mu = \mu(\phi(x,y))$，则 $\frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu'(\phi)\frac{\partial \phi}{\partial x}$，$\frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu'(\phi)\frac{\partial \phi}{\partial y}$。代入得：

$$\mu'(\phi)\frac{\partial \phi}{\partial y}P + \mu\frac{\partial P}{\partial y} = \mu'(\phi)\frac{\partial \phi}{\partial x}Q + \mu\frac{\partial Q}{\partial x}$$

移项并整理，将含有 μ 和 μ' 的项分别归拢提取：

$$\mu\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = \mu'(\phi)\left(Q\frac{\partial \phi}{\partial x} - P\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)$$

假设 $Q\frac{\partial\phi}{\partial x}-P\frac{\partial\phi}{\partial y}\neq 0$ 且 $\mu\neq 0$，等式两端同除以 $\mu\left(Q\frac{\partial\phi}{\partial x}-P\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)$，得到：

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{Q\frac{\partial\phi}{\partial x}-P\frac{\partial\phi}{\partial y}}=\frac{\mu'(\phi)}{\mu(\phi)}$$

必要性：若 $\mu(\phi)$ 是积分因子，上式右端 $\frac{\mu'(\phi)}{\mu(\phi)}$ 显然是一个仅依赖于中间变量 $\phi(x,y)$ 的一元函数。令其为 $f(\phi)$，则左端必等于 $f(\phi)$。**充分性**：若等式左端等于某一元函数 $f(\phi)$，即已知 $\frac{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{Q\frac{\partial\phi}{\partial x}-P\frac{\partial\phi}{\partial y}}=f(\phi)$，则可直接构造函数 $\mu(\phi)=\exp\left(\int f(\phi)\mathrm{d}\phi\right)$。对其逆推上述偏导数展开过程，可知该 $\mu(\phi)$ 满足 $\frac{\partial(\mu P)}{\partial y}=\frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}$，确为原方程的积分因子。综上，原命题得证。

第二部分：定理应用

将具体的 $\phi(x,y)$ 代入上述已证的充要条件公式中，即可得到各类积分因子的充要条件：

(1) 对于 $\mu=\mu(x\pm y)$，此时 $\phi(x,y)=x\pm y$，有 $\frac{\partial\phi}{\partial x}=1$，$\frac{\partial\phi}{\partial y}=\pm 1$。代入公式，其充要条件为：

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{Q\mp P}\ \text{是} x\pm y \text{ 的函数.}$$

(2) 对于 $\mu=\mu(x^2+y^2)$，此时 $\phi(x,y)=x^2+y^2$，有 $\frac{\partial\phi}{\partial x}=2x$，$\frac{\partial\phi}{\partial y}=2y$。代入公式，其充要条件为：

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{2xQ-2yP}\ \text{是} x^2+y^2 \text{ 的函数.}$$

(3) 对于 $\mu=\mu(xy)$，此时 $\phi(x,y)=xy$，有 $\frac{\partial\phi}{\partial x}=y$，$\frac{\partial\phi}{\partial y}=x$。代入公式，其充要条件为：

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{yQ-xP}\ \text{是} xy \text{ 的函数.}$$

(4) 对于 $\mu=\mu(x^\alpha y^\beta)$，此时 $\phi(x,y)=x^\alpha y^\beta$，有 $\frac{\partial\phi}{\partial x}=\alpha x^{\alpha-1}y^\beta$，$\frac{\partial\phi}{\partial y}=\beta x^\alpha y^{\beta-1}$。代入公式，其充要条件为：

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{\alpha Qx^{\alpha-1}y^\beta-\beta Px^\alpha y^{\beta-1}}\ \text{是} x^\alpha y^\beta \text{ 的函数.}$$

□

2.5 一阶隐式微分方程

1. 求解下列微分方程：

(1) $8y'^3=27y$;

(2) $y^2(y'^2+1)=1$;

(3) $y'^2+xy=y^2+xy'$;

(4) $y'^4+y^2=y^4$;

(5) $y+xy'=4\sqrt{y'}$.

Proof. (1) 引入参数 $p=y'$，原方程化为 $8p^3=27y$，即 $y=\frac{8}{27}p^3$。对 x 求微分得 $\mathrm{d}y=\frac{8}{9}p^2\mathrm{d}p$。代入 $\mathrm{d}y=p\mathrm{d}x$：

$$p\mathrm{d}x=\frac{8}{9}p^2\mathrm{d}p\implies p\left(\mathrm{d}x-\frac{8}{9}p\mathrm{d}p\right)=0$$

若 $p=0$，则 $y=0$，代入原方程恒成立，为特解。若 $p\neq 0$，则 $\mathrm{d}x=\frac{8}{9}p\mathrm{d}p$。两边积分得：

$$x=\frac{4}{9}p^2+C\implies p^2=\frac{9}{4}(x-C)\implies p^3=\pm\frac{27}{8}(x-C)^{\frac{3}{2}}$$

代回 $y=\frac{8}{27}p^3$，得通解 $y=\pm(x-C)^{\frac{3}{2}}$。两端平方化简，得方程的解为：

$$y^2=(x-C)^3 \quad 以及 \quad y=0$$

(2) 引入参数 $p=y'$，原方程化为 $y^2(p^2+1)=1$。令 $p=\tan t$，则 $y^2\sec^2 t=1 \implies y=\pm\cos t$。求微分得 $\mathrm{d}y=\mp\sin t\mathrm{d}t$。代入 $\mathrm{d}y=p\mathrm{d}x=\tan t\mathrm{d}x$：

$$\tan t\mathrm{d}x=\mp\sin t\mathrm{d}t \implies \mathrm{d}x=\mp\cos t\mathrm{d}t$$

两边积分得 $x=\mp\sin t+C \implies \pm(x-C)=-\sin t$。消去参数 t：

$$(x-C)^2+y^2=(-\sin t)^2+(\pm\cos t)^2=1$$

若 $p=0$，由方程得 $y=\pm1$，代入原方程均成立，为特解。综上，该方程的解为：

$$(x-C)^2+y^2=1 \quad 以及 \quad y=\pm1$$

(3) 将方程移项并因式分解：

$$y'^2-xy'-y^2+xy=0 \implies y'(y'-x)-y(y-x)=0 \implies (y'-y)(y'+y-x)=0$$

原方程分解为两个一阶线性微分方程：情形一：$y'-y=0$，积分得 $y=Ce^x$。情形二：$y'+y=x$，两边同乘积分因子 e^x 得 $(ye^x)'=xe^x$。积分得 $ye^x=xe^x-e^x+C$，即 $y=x-1+Ce^{-x}$。综上，原方程的通解为：

$$(y-Ce^x)(y-x+1-Ce^{-x})=0$$

(4) 引入参数 $p=y'$，原方程化为 $p^4+y^2=y^4 \implies \left(\frac{p}{y}\right)^4+\left(\frac{1}{y}\right)^2=1$。令 $\frac{1}{y}=\cos t$，则 $y=\sec t$。代入上式得：

$$\left(\frac{p}{y}\right)^4=1-\cos^2 t=\sin^2 t \implies \frac{p}{y}=\pm\sqrt{\sin t} \implies p=\pm\frac{\sqrt{\sin t}}{\cos t} \quad (\sin t\geqslant 0)$$

对 y 求微分得 $\mathrm{d}y=\frac{\sin t}{\cos^2 t}\mathrm{d}t$。代入 $\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}y}{p}$：

$$\mathrm{d}x=\frac{\frac{\sin t}{\cos^2 t}\mathrm{d}t}{\pm\frac{\sqrt{\sin t}}{\cos t}}=\pm\frac{\sqrt{\sin t}}{\cos t}\mathrm{d}t$$

令 $u=\sqrt{\sin t}$，则 $u^2=\sin t$ 且 $2u\mathrm{d}u=\cos t\mathrm{d}t$。代入得：

$$\mathrm{d}x=\pm\frac{u}{\cos t}\cdot\frac{2u}{\cos t}\mathrm{d}u=\pm\frac{2u^2}{1-u^4}\mathrm{d}u=\pm\left(\frac{1}{1-u^2}-\frac{1}{1+u^2}\right)\mathrm{d}u$$

积分得：

$$x=\pm\left(\frac{1}{2}\ln\frac{1+u}{1-u}-\arctan u\right)+C$$

若 $p=0$，由方程解得 $y=0$ 或 $y=\pm1$，经检验均为特解。综上，方程的解为特解 $y=0, y=\pm1$ 以及参数解：

$$\begin{cases} x=\pm\left(\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sqrt{\sin t}}{1-\sqrt{\sin t}}-\arctan\sqrt{\sin t}\right)+C \\ y=\pm\sec t \end{cases} \qquad (\sin t\geqslant 0)$$

(5) 引入参数 $p=y'$，原方程化为 $y=-xp+4\sqrt{p}$。两端对 x 求导：

$$p=-p-x\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}+\frac{2}{\sqrt{p}}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} \implies 2p=\left(\frac{2}{\sqrt{p}}-x\right)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$$

假设 $p\neq 0$，将其视为以 p 为自变量的线性方程：

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p}+\frac{1}{2p}x=p^{-\frac{3}{2}}$$

乘积分因子 $\mu(p)=\sqrt{p}$：

$$\sqrt{p}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p}+\frac{1}{2\sqrt{p}}x=p^{-1} \implies \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}(x\sqrt{p})=\frac{1}{p}$$

积分得 $x\sqrt{p}=\ln p+C \implies x=\frac{\ln p+C}{\sqrt{p}}$ $(p>0)$。将 x 代回原方程表达式得 $y=\sqrt{p}(4-C-\ln p)$。若 $p=0$，代入原方程得 $y=0$，经检验为特解。综上，方程的解为特解 $y=0$ 以及参数解：

$$\begin{cases} x=\frac{\ln p+C}{\sqrt{p}} \\ y=\sqrt{p}(4-C-\ln p) \end{cases} \qquad (p>0)$$

□

2. 利用参数法求解下列微分方程：

(1) $2xy'-y=y'\ln(yy')$;

(2) $y'^4=2yy'+y^2$;

(3) $y'^2-2xy'=x^2-4y$;

(4) $y^2+y'^3=4xyy'$.

Proof. (1) 将原方程两边同乘 y，整理得：

$$2xyy'-y^2=yy'\ln(yy')$$

引入变量代换 $u=y^2$，则 $u'=2yy'$。代入上式，方程化为：

$$xu'-u=\frac{1}{2}u'\ln\left(\frac{1}{2}u'\right) \implies u=xu'-\frac{1}{2}u'\ln\left(\frac{1}{2}u'\right)$$

这是一个克莱罗 (Clairaut) 方程。引入参数 $P=u'$，则 $u=xP-\frac{1}{2}P\ln(\frac{1}{2}P)$。等式两边对 x 求导：

$$P=P+x\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}-\frac{1}{2}\left[\ln\left(\frac{1}{2}P\right)+1\right]\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} \implies \left[x-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}P\right)-\frac{1}{2}\right]\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}=0$$

情形一：$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}=0 \implies P=C$。代回克莱罗方程并还原 $u=y^2$，得通解：

$$y^2=Cx-\frac{1}{2}C\ln\left(\frac{1}{2}C\right)$$

情形二：$x-\frac{1}{2}\ln(\frac{1}{2}P)-\frac{1}{2}=0 \implies \ln(\frac{1}{2}P)=2x-1 \implies P=2e^{2x-1}$。代回原参数方程得奇解：

$$y^2=x(2e^{2x-1})-\frac{1}{2}(2e^{2x-1})(2x-1)=e^{2x-1}$$

(2) 引入参数 $p=y'$，原方程化为 $p^4=2py+y^2$。令 $y=pv$，代入得 $p^4=2p^2v+p^2v^2$。假设 $p\neq 0$，化简得 $p^2=v^2+2v$。对 $y=pv$ 求微分：$\mathrm{d}y=p\mathrm{d}v+v\mathrm{d}p$。代入 $\mathrm{d}y=p\mathrm{d}x$ 中，得：

$$\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}y}{p}=\mathrm{d}v+v\frac{\mathrm{d}p}{p}$$

对 $p^2=v^2+2v$ 两边取对数并求微分，得 $2\frac{\mathrm{d}p}{p}=\frac{2v+2}{v^2+2v}\mathrm{d}v \implies \frac{\mathrm{d}p}{p}=\frac{v+1}{v(v+2)}\mathrm{d}v$。代入 $\mathrm{d}x$ 的表达式中：

$$\mathrm{d}x=\mathrm{d}v+v\frac{v+1}{v(v+2)}\mathrm{d}v=\left(1+\frac{v+1}{v+2}\right)\mathrm{d}v=\left(2-\frac{1}{v+2}\right)\mathrm{d}v$$

两边积分得 $x=2v-\ln|v+2|+C$。结合 $y=pv=\pm v\sqrt{v^2+2v}$，得到方程的参数形式通解：

$$\begin{cases} x=2v-\ln|v+2|+C \\ y=\pm v\sqrt{v^2+2v} \end{cases} \qquad (v^2+2v\geqslant 0)$$

此外，若 $p=0$，代入原方程得 $y=0$，经检验满足方程，为奇解。

(3) 引入参数 $p=y'$，原方程改写为 $4y=-p^2+2xp+x^2$。等式两端对 x 求导：

$$4p=-2p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}+2p+2x\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}+2x \implies 2p-2x=2(x-p)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} \implies (p-x)\left(1+\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\right)=0$$

情形一：$1+\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=0 \implies p=-x+C$。代回 $4y$ 的表达式中：

$$4y=-(-x+C)^2+2x(-x+C)+x^2=-2x^2+4Cx-C^2$$

化简得通解 $y=-\frac{1}{2}x^2+Cx-\frac{1}{4}C^2$。

情形二：$p-x=0 \implies p=x$。代回 $4y$ 的表达式中：

$$4y=-x^2+2x^2+x^2=2x^2 \implies y=\frac{1}{2}x^2$$

经检验，此为该微分方程的奇解。

(4) 引入参数 $p=y'$，原方程化为 $y^2+p^3=4xyp$，解出 x 得：

$$4x=\frac{y}{p}+\frac{p^2}{y}$$

为简化微分结构，引入新的参数 $u=\frac{p^2}{y}$，则 $y=\frac{p^2}{u}$，且 $\frac{y}{p}=\frac{p}{u}$。于是 x 可表示为 $4x=\frac{p}{u}+u$。对 y 与 x 分别求微分：

$$\mathrm{d}y=\frac{2p}{u}\mathrm{d}p-\frac{p^2}{u^2}\mathrm{d}u,\quad \mathrm{d}x=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{u}\mathrm{d}p-\frac{p}{u^2}\mathrm{d}u+\mathrm{d}u\right)$$

由 $\mathrm{d}y=p\mathrm{d}x$ 可得：

$$\frac{2p}{u}\mathrm{d}p-\frac{p^2}{u^2}\mathrm{d}u=\frac{p}{4u}\mathrm{d}p-\frac{p^2}{4u^2}\mathrm{d}u+\frac{p}{4}\mathrm{d}u$$

假设 $p\neq 0$，两端同除以 p 并合并同类项：

$$\frac{7}{4u}\mathrm{d}p=\left(\frac{3p}{4u^2}+\frac{1}{4}\right)\mathrm{d}u \implies 7\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}u}=\frac{3p}{u}+u \implies \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}u}-\frac{3}{7u}p=\frac{1}{7}u$$

这是一个关于 $p(u)$ 的一阶线性微分方程，其积分因子为 $\mu(u)=e^{\int -\frac{3}{7u}\mathrm{d}u}=u^{-\frac{3}{7}}$。方程两边同乘 $u^{-\frac{3}{7}}$，化为 $(pu^{-\frac{3}{7}})'=\frac{1}{7}u^{\frac{4}{7}}$。积分得：

$$pu^{-\frac{3}{7}}=\frac{1}{11}u^{\frac{11}{7}}+C \implies p=\frac{1}{11}u^2+Cu^{\frac{3}{7}}$$

将 $p(u)$ 代回 x 和 y 的表达式，得到方程的参数形式通解：

$$\begin{cases} x=\frac{1}{4}\left(\frac{p}{u}+u\right)=\frac{3}{11}u+\frac{1}{4}Cu^{-\frac{4}{7}} \\ y=\frac{p^2}{u}=u\left(\frac{1}{11}u+Cu^{-\frac{4}{7}}\right)^2 \end{cases}$$

此外，若 $p=0$，代入原方程得 $y=0$，经检验满足原方程，为奇解。 □

3. 求一曲线, 使其在任一点处的切线与两条坐标轴所构成三角形的面积为 $2a^2$.

Proof. 设所求曲线上任意一点的坐标为 (x,y)，该点处的导数为 y'（假定 $y'\neq 0$）。在该点处的切线方程为：

$$Y-y=y'(X-x)$$

令 $Y=0$，求得切线在 x 轴上的截距为 $X=x-\frac{y}{y'}$。令 $X=0$，求得切线在 y 轴上的截距为 $Y=y-xy'$。根据题意，切线与两坐标轴围成的三角形面积为 $2a^2$，即：

$$\frac{1}{2}|X\cdot Y|=2a^2$$

代入截距表达式：

$$\frac{1}{2}\left|\left(x-\frac{y}{y'}\right)(y-xy')\right|=2a^2 \implies \frac{(xy'-y)^2}{2|y'|}=2a^2$$

化简并提取 y，得到：

$$(y-xy')^2 = 4a^2|y'| \implies y = xy' \pm 2a\sqrt{|y'|}$$

引入参数 $p=y'$，原方程化为克莱罗（Clairaut）方程：

$$y = xp \pm 2a\sqrt{|p|}$$

对方程两边关于 x 求导，分 $p>0$ 与 $p<0$ 两种情形讨论：

情形一：当 $p>0$ **时**方程为 $y = xp \pm 2a\sqrt{p}$。两边对 x 求导得：

$$p = p + x\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} \pm \frac{a}{\sqrt{p}}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} \implies \left(x \pm \frac{a}{\sqrt{p}}\right)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = 0$$

若 $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=0$,则 $p=C_1>0$,代回得通解 $y=C_1x\pm 2a\sqrt{C_1}$（表示切线族）。若 $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\neq 0$,则 $x\pm\frac{a}{\sqrt{p}}=0 \implies \sqrt{p}=\mp\frac{a}{x}$。由于 $\sqrt{p}>0$，必有 $p=\frac{a^2}{x^2}$。将参数 p 代回原克莱罗方程求奇解：

$$y = x\left(\frac{a^2}{x^2}\right) \pm 2a\left(\mp\frac{a}{x}\right) = \frac{a^2}{x} - \frac{2a^2}{x} = -\frac{a^2}{x} \implies xy = -a^2$$

情形二：当 $p<0$ **时**方程为 $y = xp \pm 2a\sqrt{-p}$。两边对 x 求导得：

$$p = p + x\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} \pm 2a\left(\frac{-1}{2\sqrt{-p}}\right)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} \implies \left(x \mp \frac{a}{\sqrt{-p}}\right)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = 0$$

若 $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=0$，则 $p=C_2<0$，代回得通解 $y=C_2x\pm 2a\sqrt{-C_2}$（表示切线族）。若 $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\neq 0$，则 $x\mp\frac{a}{\sqrt{-p}}=0 \implies \sqrt{-p}=\pm\frac{a}{x}$。由于 $\sqrt{-p}>0$，必有 $-p=\frac{a^2}{x^2} \implies p=-\frac{a^2}{x^2}$。将参数 p 代回原克莱罗方程求奇解：

$$y = x\left(-\frac{a^2}{x^2}\right) \pm 2a\left(\pm\frac{a}{x}\right) = -\frac{a^2}{x} + \frac{2a^2}{x} = \frac{a^2}{x} \implies xy = a^2$$

综上所述，克莱罗方程的通解为 $y=Cx\pm 2a\sqrt{|C|}$，它表示满足条件的全部直线；而作为其包络线的奇解，即题目所求的“曲线”，其方程为：

$$xy = a^2 \quad 或 \quad xy = -a^2$$

（即等轴双曲线 $xy=\pm a^2$）。 □

2.6 应用举例

1. 求曲线族 $x^2+y^2=cx$ 的正交轨线族，其中 c 为任意常数.

Proof. 对原曲线族方程 $x^2+y^2=cx$ 两边关于 x 求导：

$$2x + 2yy' = c$$

将 $c=\frac{x^2+y^2}{x}$ 代回上式以消去任意常数 c：

$$2x + 2yy' = \frac{x^2+y^2}{x} \implies 2x^2 + 2xyy' = x^2 + y^2 \implies y' = \frac{y^2-x^2}{2xy}$$

求正交轨线，需将上式中的 y' 替换为 $-\frac{1}{y'}$：

$$-\frac{1}{y'} = \frac{y^2-x^2}{2xy} \implies y' = \frac{2xy}{x^2-y^2}$$

分离微分项并整理该方程：

$$(x^2-y^2)\mathrm{d}y = 2xy\mathrm{d}x \implies 2xy\mathrm{d}x - x^2\mathrm{d}y + y^2\mathrm{d}y = 0$$

假设 $y \neq 0$，两端同除以 y^2 进行凑微分：

$$\frac{2xy\mathrm{d}x - x^2\mathrm{d}y}{y^2} + \mathrm{d}y = 0 \implies \mathrm{d}\left(\frac{x^2}{y}\right) + \mathrm{d}y = 0$$

两边直接积分得到正交轨线族的通解：

$$\frac{x^2}{y} + y = C \implies x^2 + y^2 = Cy$$

□

2. 求一曲线，使其任一点处的切线与横轴的交点到切点的距离等于该交点到原点的距离.

Proof. 设所求曲线上任意一点为 (x, y)，该点处的切线方程为：

$$Y - y = y'(X - x)$$

令 $Y = 0$，得切线与横轴的交点坐标为 $\left(x - \frac{y}{y'}, 0\right)$。根据题意，交点到切点 (x, y) 的距离等于该交点到原点 $(0, 0)$ 的距离：

$$\left(x - \left(x - \frac{y}{y'}\right)\right)^2 + y^2 = \left(x - \frac{y}{y'}\right)^2 + 0^2$$
$$\left(\frac{y}{y'}\right)^2 + y^2 = x^2 - \frac{2xy}{y'} + \left(\frac{y}{y'}\right)^2$$

化简得到微分方程：

$$y^2 = x^2 - \frac{2xy}{y'} \implies x^2 - y^2 = \frac{2xy}{y'} \implies y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$$

此微分方程与上一题求得的正交轨线微分方程完全一致。同理求解可得该曲线的方程为：

$$x^2 + y^2 = Cy$$

□

3. 设 $y = \phi(x)$ 满足

$$y' + a(x)y \leqslant 0, \quad x \geqslant 0.$$

证明：

$$\phi(x) \leqslant \phi(0)e^{-\int_0^x a(s)\mathrm{d}s}, \quad x \geqslant 0.$$

Proof. 已知 $y' + a(x)y \leqslant 0$。不等式两端同乘积分因子 $e^{\int_0^x a(s)\mathrm{d}s}$（因指数函数恒为正，不等号方向不变）：

$$y'e^{\int_0^x a(s)\mathrm{d}s} + a(x)ye^{\int_0^x a(s)\mathrm{d}s} \leqslant 0$$

将左端合并为乘积的导数形式：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(ye^{\int_0^x a(s)\mathrm{d}s}\right) \leqslant 0$$

将 y 替换为 $\phi(x)$，对上式在 $[0, x]$ 上进行定积分：

$$\int_0^x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\phi(t)e^{\int_0^t a(s)\mathrm{d}s}\right)\mathrm{d}t \leqslant 0$$

$$\phi(x)e^{\int_0^x a(s)\mathrm{d}s} - \phi(0)e^0 \leqslant 0$$

移项可得：

$$\phi(x)e^{\int_0^x a(s)\mathrm{d}s} \leqslant \phi(0)$$

即

$$\phi(x) \leqslant \phi(0)e^{-\int_0^x a(s)\mathrm{d}s}$$

结论得证。 □

4. 求解方程

$$y = \int_0^x y(t)\mathrm{d}t + x + 1.$$

Proof. 令 $x = 0$ 代入原方程，求得初始条件：

$$y(0) = \int_0^0 y(t)\mathrm{d}t + 0 + 1 = 1$$

对原方程两边同时关于 x 求导（应用变上限积分求导定理）：

$$y' = y + 1 \implies y' - y = 1$$

该方程为一阶线性常微分方程。方程两端同乘积分因子 e^{-x}：

$$(ye^{-x})' = e^{-x}$$

两边关于 x 进行积分：

$$ye^{-x} = -e^{-x} + C \implies y = Ce^x - 1$$

代入初始条件 $y(0) = 1$ 确定常数 C：

$$1 = Ce^0 - 1 \implies C = 2$$

故该方程的解为：

$$y = 2e^x - 1$$

□

5. 证明：单摆方程 $y'' + \sin y = 0$ 有当 $x \to +\infty$ 时趋向于 π 的解.

Proof. 令 $p = y'$，则 $y'' = p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$。原微分方程化为：

$$p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} + \sin y = 0$$

分离变量并积分：

$$\int p\mathrm{d}p = -\int \sin y\mathrm{d}y \implies \frac{1}{2}p^2 = \cos y + C$$

要使 $x \to +\infty$ 时解 $y \to \pi$，必然要求当 $y \to \pi$ 时，导数 $y' \to 0$。将 $y = \pi, p = 0$ 代入上述首次积分式中以确定常数 C：

$$0 = \cos\pi + C \implies C = 1$$

代回得到：

$$p^2 = 2(\cos y + 1) = 4\cos^2\frac{y}{2}$$

考察解从下方无限趋近于 π 的过程（即 $y < \pi$ 且 y 递增），取正根 $p = y' = 2\cos\frac{y}{2}$。分离变量求解此一阶方程：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\cos\frac{y}{2}} = 2\mathrm{d}x$$

两边积分：

$$2\ln\left|\sec\frac{y}{2} + \tan\frac{y}{2}\right| = 2x + C_1 \implies \ln\frac{1+\sin\frac{y}{2}}{\cos\frac{y}{2}} = x + C_2$$

解出指数形式：

$$\frac{1+\sin\frac{y}{2}}{\cos\frac{y}{2}} = Ke^x \quad (K > 0)$$

当 $x \to +\infty$ 时，等式右端 $Ke^x \to +\infty$。由于当 $y \to \pi$ 时，分子 $1 + \sin\frac{y}{2} \to 2$ 是一有界常数，要使等式左端趋于正无穷，必须且只需分母趋于 0^+，即 $\cos\frac{y}{2} \to 0^+$，这等价于 $y \to \pi$。故存在满足条件的解族，命题得证。 □

6. 设函数 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上可导，且

$$\int_1^{xy} f(t)\mathrm{d}t = x\int_1^y f(t)\mathrm{d}t + y\int_1^x f(t)\mathrm{d}t, \quad x,y>0.$$

如果 $f(1)=3$，求 $f(x)$.

Proof. 将 y 视作常数，对已知等式两端关于 x 求导：

$$yf(xy) = \int_1^y f(t)\mathrm{d}t + yf(x)$$

令 $x=1$，代入上式得：

$$yf(y) = \int_1^y f(t)\mathrm{d}t + yf(1)$$

已知 $f(1)=3$，代入化简：

$$yf(y) = \int_1^y f(t)\mathrm{d}t + 3y$$

对上式两端再关于 y 求导：

$$f(y)+yf'(y) = f(y)+3 \implies yf'(y)=3$$

由于 $y>0$，可得：

$$f'(y)=\frac{3}{y}$$

两边积分得到通解形式：

$$f(y) = 3\ln y + C$$

利用初始条件 $f(1)=3$ 确定常数 C：

$$3\ln 1 + C = 3 \implies C=3$$

故所求函数为：

$$f(x) = 3\ln x + 3$$

□

7. 设当 $x>-1$ 时，可微函数 $f(x)$ 满足

$$f'(x)+f(x)-\frac{1}{x+1}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = 0,$$

且 $f(0)=1$. 证明: 当 $x\geqslant 0$ 时, $e^{-x}\leqslant f(x)\leqslant 1$.

Proof. 将原等式两端同乘 $(x+1)$ 整理得：

$$(x+1)f'(x)+(x+1)f(x)-\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = 0$$

两端关于 x 求导：

$$f'(x)+(x+1)f''(x)+f(x)+(x+1)f'(x)-f(x)=0$$

化简后得到关于 $f'(x)$ 的一阶线性微分方程：

$$(x+1)f''(x)+(x+2)f'(x)=0$$

由于 $x>-1$ 即 $x+1\neq 0$，分离变量求解：

$$\frac{f''(x)}{f'(x)} = -\frac{x+2}{x+1} = -1-\frac{1}{x+1}$$

积分得 $\ln|f'(x)| = -x - \ln(x+1) + C_1$，即：

$$f'(x) = C\frac{e^{-x}}{x+1}$$

回到原方程，令 $x=0$，有 $f'(0)+f(0)-0=0 \implies f'(0)=-f(0)=-1$。代入 $f'(0)=-1$ 解得常数 $C=-1$。故：

$$f'(x) = -\frac{e^{-x}}{x+1}$$

当 $x \geqslant 0$ 时，$f'(x)<0$ 恒成立，说明 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递减。因此 $f(x) \leqslant f(0)=1$，右侧不等式得证。再根据微积分基本定理，有：

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\mathrm{d}t = 1 - \int_0^x \frac{e^{-t}}{t+1}\mathrm{d}t$$

由于当 $t \geqslant 0$ 时 $t+1 \geqslant 1$，必有 $\frac{e^{-t}}{t+1} \leqslant e^{-t}$。对该不等式在 $[0,x]$ 上积分：

$$\int_0^x \frac{e^{-t}}{t+1}\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x e^{-t}\mathrm{d}t = 1-e^{-x}$$

将其放缩结果代回 $f(x)$ 的表达式：

$$f(x) \geqslant 1-(1-e^{-x}) = e^{-x}$$

左侧不等式得证。综上，当 $x \geqslant 0$ 时，$e^{-x} \leqslant f(x) \leqslant 1$。 □

8. (追线) 在 (x,y)-平面上，设点 B 的初始位置为 (x_1,y_1)，它以常速度 b 沿直线 $y=kx+l$ 做运动; 点 A 从 (x_0,y_0) 处出发追赶点 B，它的速度为常值 a $(a>b)$. 求点 A 追上点 B 的时间以及点 A 的轨迹.

Proof. **第一部分：求追上点 B 的时间**

设时刻 t 时点 A,B 的距离为 $r(t)$。B 的速度向量 $\vec{v}_B$ 大小恒为 b；A 的速度向量 $\vec{v}_A$ 始终指向 B，大小恒为 a，即 $\vec{v}_A = a\vec{e}_r$（$\vec{e}_r$ 为由 A 指向 B 的单位向量）。$\vec{AB}$ 的变化率为 $\frac{\mathrm{d}\vec{AB}}{\mathrm{d}t} = \vec{v}_B - \vec{v}_A$。距离 $r(t)$ 的变化率为 $\vec{AB}$ 在 $\vec{e}_r$ 方向的投影：

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = (\vec{v}_B - \vec{v}_A)\cdot\vec{e}_r = b\cos\theta - a$$

其中 θ 为 $\vec{v}_B$ 与 $\vec{AB}$ 的夹角。记连线 $\vec{AB}$ 在直线 $y=kx+l$ (即 $\vec{v}_B$ 方向) 上的投影长度为 $L(t)=r\cos\theta$。其变化率为：

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = (\vec{v}_B - \vec{v}_A)\cdot\frac{\vec{v}_B}{b} = b - a\cos\theta$$

联立上述两式消去 $\cos\theta$：

$$a\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} + b\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = a(b\cos\theta - a) + b(b-a\cos\theta) = b^2-a^2$$

设经过时间 T 追上，此时 $r(T)=0, L(T)=0$。对等式两端在 $[0,T]$ 积分：

$$a(0-r_0) + b(0-L_0) = (b^2-a^2)T$$

解得追上的时间为：

$$T = \frac{ar_0+bL_0}{a^2-b^2}$$

（其中初始距离 $r_0 = \sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2}$，初始投影 $L_0 = \vec{A_0B_0}\cdot\frac{\vec{v}_B}{b}$）。

第二部分：求点 A 的轨迹

为简化常微分方程结构，建立局部平移旋转坐标系 $(\tilde{x},\tilde{y})$：原点设在 $B_0(x_1,y_1)$，$\tilde{y}$ 轴正向沿 B 的运动方向。在该坐标系中，B 的位置恒为 $(0,bt)$。设 A 位于 $(\tilde{x},\tilde{y})$，由追踪条件，A 处的切线必过 B 点：

$$\tilde{y} - \tilde{x}\frac{\mathrm{d}\tilde{y}}{\mathrm{d}\tilde{x}} = bt$$

两端对 $\tilde{x}$ 求导：

$$-\tilde{x}\frac{\mathrm{d}^2\tilde{y}}{\mathrm{d}\tilde{x}^2} = b\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tilde{x}}$$

因 A 的速率为 a，且逐渐靠近 $\tilde{y}$ 轴（不妨设位于右侧），有 $\mathrm{d}s=-\sqrt{1+(\tilde{y}')^2}\mathrm{d}\tilde{x}=a\mathrm{d}t$。代入得微分方程：

$$\tilde{x}\tilde{y}''=\frac{b}{a}\sqrt{1+(\tilde{y}')^2}$$

令 $p=\tilde{y}'$，分离变量并积分：

$$\int\frac{\mathrm{d}p}{\sqrt{1+p^2}}=\frac{b}{a}\int\frac{\mathrm{d}\tilde{x}}{\tilde{x}}\implies\ln(p+\sqrt{1+p^2})=\frac{b}{a}\ln\tilde{x}+C_1\implies p+\sqrt{1+p^2}=C_2\tilde{x}^{b/a}$$

反解出 p：

$$p=\frac{\mathrm{d}\tilde{y}}{\mathrm{d}\tilde{x}}=\frac{1}{2}\left(C_2\tilde{x}^{b/a}-C_2^{-1}\tilde{x}^{-b/a}\right)$$

两端积分，得到参数化的追踪曲线方程（因 $a>b$，幂次积分无对数项）：

$$\tilde{y}=\frac{C_2}{2(1+b/a)}\tilde{x}^{1+b/a}-\frac{C_2^{-1}}{2(1-b/a)}\tilde{x}^{1-b/a}+C_3$$

其中积分常数 C_2,C_3 由 A 的初始相对坐标唯一确定。通过将 $(\tilde{x},\tilde{y})$ 逆代换回原平面 (x,y) 即可得到一般的轨迹方程。 □

3 解的存在性与唯一性

3.1 准备知识

1. 设 $\phi(t), \psi(t), \chi(t)$ 是区间 $[a,b]$ 上的连续函数, $\chi(t) > 0$. 证明: 如果

$$\phi(t) \leqslant \psi(t) + \int_a^t \chi(s)\phi(s)\mathrm{d}s,$$

则

$$\phi(t) \leqslant \psi(t) + \int_a^t \chi(s)\psi(s)e^{\int_s^t \chi(\tau)\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}s.$$

Proof. **此题证明过程可完全 1：1 复刻教材中的 Gronwall's Inequality 证明过程：**

令 $R(t) = \int_a^t \chi(s)\phi(s)\mathrm{d}s$。由于被积函数连续，$R(t)$ 在 $[a,b]$ 上可导，且其导数为：

$$R'(t) = \chi(t)\phi(t)$$

并且有初始条件：

$$R(a) = \int_a^a \chi(s)\phi(s)\mathrm{d}s = 0$$

根据题设条件，有：

$$\phi(t) \leqslant \psi(t) + R(t)$$
$$\chi(t)\phi(t) \leqslant \chi(t)\psi(t) + \chi(t)R(t)$$
$$R'(t) - \chi(t)R(t) \leqslant \chi(t)\psi(t)$$

我们在两端同乘积分因子 $\mu(t) = e^{-\int_a^t \chi(\tau)\mathrm{d}\tau}$：

$$R'(t)e^{-\int_a^t \chi(\tau)\mathrm{d}\tau} - \chi(t)R(t)e^{-\int_a^t \chi(\tau)\mathrm{d}\tau} \leqslant \chi(t)\psi(t)e^{-\int_a^t \chi(\tau)\mathrm{d}\tau}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(R(t)e^{-\int_a^t \chi(\tau)\mathrm{d}\tau}\right) \leqslant \chi(t)\psi(t)e^{-\int_a^t \chi(\tau)\mathrm{d}\tau}$$

对上述不等式在区间 $[a,t]$ 上进行定积分：

$$\int_a^t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(R(s)e^{-\int_a^s \chi(\tau)\mathrm{d}\tau}\right)\mathrm{d}s \leqslant \int_a^t \chi(s)\psi(s)e^{-\int_a^s \chi(\tau)\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}s$$

应用牛顿-莱布尼茨公式，左端化为：

$$R(t)e^{-\int_a^t \chi(\tau)\mathrm{d}\tau} - R(a)e^{-\int_a^a \chi(\tau)\mathrm{d}\tau} \leqslant \int_a^t \chi(s)\psi(s)e^{-\int_a^s \chi(\tau)\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}s$$

由于 $R(a) = 0$，上式可直接简化为：

$$R(t)e^{-\int_a^t \chi(\tau)\mathrm{d}\tau} \leqslant \int_a^t \chi(s)\psi(s)e^{-\int_a^s \chi(\tau)\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}s$$

$$R(t) \leqslant e^{\int_a^t \chi(\tau)\mathrm{d}\tau}\int_a^t \chi(s)\psi(s)e^{-\int_a^s \chi(\tau)\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}s$$

由于 $e^{\int_a^t \chi(\tau)\mathrm{d}\tau}$ 相对于积分变量 s 是一个常数，可以将其移入积分号内：

$$R(t) \leqslant \int_a^t \chi(s)\psi(s)e^{\int_a^t \chi(\tau)\mathrm{d}\tau - \int_a^s \chi(\tau)\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}s$$

$$R(t) \leqslant \int_a^t \chi(s)\psi(s)e^{\int_s^t \chi(\tau)\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}s$$

最后，将求得的 $R(t)$ 的上界代回题设最开始的不等式 $\phi(t) \leqslant \psi(t) + R(t)$ 中：

$$\phi(t) \leqslant \psi(t) + \int_a^t \chi(s)\psi(s)e^{\int_s^t \chi(\tau)\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}s$$

命题得证。 □

2. 设函数 f 定义在 (t,x)-平面中的区域 D 上，称其是 Lip 类的，如果存在可积函数 $k(t)$，使得对于一切的 $(t,x),(t,\bar{x})\in D$，有

$$|f(t,x)-f(t,\bar{x})|\leqslant k(t)|x-\bar{x}|.$$

现在假设 f 是 Lip 类的，$\phi_1(t),\phi_2(t)$ 是区间 $I=[a,b]$ 上的连续函数，$f(t,\phi_j(t))$ $(j=1,2)$ 在 I 上可积，

$$\phi_j(t)=\phi_j(\tau)+\int_\tau^t f(s,\phi_j(s))\mathrm{d}s+E_j(t),\quad j=1,2,$$

并且 $|\phi_1(\tau)-\phi_2(\tau)|\leqslant\delta$，其中 $\tau\in I$，常数 $\delta>0$，$E_j(t)$ $(j=1,2)$ 是定义在 I 上的连续函数。令 $E(t)=|E_1(t)|+|E_2(t)|$。证明：对于 $\tau\leqslant t\leqslant b$，有

$$|\phi_1(t)-\phi_2(t)|\leqslant\delta e^{\int_\tau^t k(s)\mathrm{d}s}+E(t)+\int_\tau^t E(s)k(s)e^{\int_s^t k(u)\mathrm{d}u}\mathrm{d}s.$$

对于 $a\leqslant t\leqslant\tau$，也有类似的结论。

Proof. 由题意知，对于 $j=1,2$，有积分方程：

$$\phi_j(t)=\phi_j(\tau)+\int_\tau^t f(s,\phi_j(s))\mathrm{d}s+E_j(t)$$

两式相减可得：

$$\phi_1(t)-\phi_2(t)=\phi_1(\tau)-\phi_2(\tau)+\int_\tau^t[f(s,\phi_1(s))-f(s,\phi_2(s))]\mathrm{d}s+E_1(t)-E_2(t)$$

由于 $\tau\leqslant t\leqslant b$，此时积分上限大于下限，对上式两端取绝对值，并利用绝对值不等式，得：

$$|\phi_1(t)-\phi_2(t)|\leqslant|\phi_1(\tau)-\phi_2(\tau)|+\int_\tau^t|f(s,\phi_1(s))-f(s,\phi_2(s))|\mathrm{d}s+|E_1(t)|+|E_2(t)|$$

根据已知条件 $|\phi_1(\tau)-\phi_2(\tau)|\leqslant\delta$，$E(t)=|E_1(t)|+|E_2(t)|$，以及函数 f 满足的 Lip 条件 $|f(s,\phi_1(s))-f(s,\phi_2(s))|\leqslant k(s)|\phi_1(s)-\phi_2(s)|$，代入上述不等式中。令 $u(t)=|\phi_1(t)-\phi_2(t)|$，可得：

$$u(t)\leqslant\delta+E(t)+\int_\tau^t k(s)u(s)\mathrm{d}s$$

由上一题结论：

$$u(t)\leqslant\delta+E(t)+\int_\tau^t k(s)[\delta+E(s)]e^{\int_s^t k(u)\mathrm{d}u}\mathrm{d}s=\delta+E(t)+\delta e^{\int_\tau^t k(u)\mathrm{d}u}-\delta+\int_\tau^t E(s)k(s)e^{\int_s^t k(u)\mathrm{d}u}\mathrm{d}s$$

化简消去 δ，即得到：

$$|\phi_1(t)-\phi_2(t)|\leqslant\delta e^{\int_\tau^t k(s)\mathrm{d}s}+E(t)+\int_\tau^t E(s)k(s)e^{\int_s^t k(u)\mathrm{d}u}\mathrm{d}s$$

对于 $a\leqslant t\leqslant\tau$ 的情况，处理方式类似。原命题得证。 □

3. 证明：若一个函数序列在有界区间 I 上一致有界且等度连续，则在 I 上它至少有一个一致收敛的子序列。该结论在无限区间上成立吗？

Proof.（1）证明在有界区间 I 上存在一致收敛的子序列（Arzelà-Ascoli 定理）：

设 $\{f_n\}$ 为有界区间 I 上的函数序列。由于 I 有界，必定存在一个可数稠密子集 $D=\{x_1,x_2,\ldots,x_k,\ldots\}\subset I$（例如取出所有的有理数）。

由于 $\{f_n\}$ 在 I 上一致有界，对于点 x_1，实数数列 $\{f_n(x_1)\}$ 是有界的。由 Bolzano-Weierstrass 定理，必定存在收敛的子序列，记作 $\{f_{1,n}\}$。同理，对于点 x_2，数列 $\{f_{1,n}(x_2)\}$ 有界，可从中提取收敛子序列 $\{f_{2,n}\}$。以此类推，对于 x_k，可从 $\{f_{k-1,n}\}$ 中提取在 x_k 处收敛的子序列 $\{f_{k,n}\}$。

采用对角线法则，构造对角线序列 $g_n(x) = f_{n,n}(x)$。该序列是原序列的子序列，且对于任意 $x_k \in D$，当 $n \geqslant k$ 时，g_n 属于 $\{f_{k,n}\}$。因此 $\{g_n\}$ 在稠密集 D 的每个点上均收敛。

下面证明 $\{g_n\}$ 在 I 上一致收敛。任给 $\varepsilon > 0$。由于 $\{f_n\}$ 在 I 上等度连续，其子序列 $\{g_n\}$ 同样等度连续。即存在 $\delta > 0$，使得对任意 $x, y \in I$ 且 $|x - y| < \delta$，对所有 n 均有：

$$|g_n(x) - g_n(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

因为 I 有界，其闭包 $\bar{I}$ 是紧集，故存在 D 中的有限个点 $y_1, y_2, \ldots, y_m$，使得由 $(y_i - \delta, y_i + \delta)$ 构成的邻域能完全覆盖 I。由于 $\{g_n\}$ 在每个 y_i 处收敛，且 y_i 个数有限，故存在正整数 N，当 $p, q > N$ 时，对所有的 $i = 1, 2, \ldots, m$ 有：

$$|g_p(y_i) - g_q(y_i)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

对任意 $x \in I$，必定存在某个 y_i 使得 $|x - y_i| < \delta$。于是当 $p, q > N$ 时：

$$|g_p(x) - g_q(x)| \leqslant |g_p(x) - g_p(y_i)| + |g_p(y_i) - g_q(y_i)| + |g_q(y_i) - g_q(x)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

由柯西一致收敛准则可知，子序列 $\{g_n\}$ 在 I 上一致收敛。

（2）该结论在无限区间上不成立。

反例：考虑定义在无限区间 $[0, +\infty)$ 上的连续函数序列 $f_n(x) = \max\{0, 1 - |x - n|\}$，其中 $n = 1, 2, \ldots$。一致有界性：对所有 n 和 $x \in [0, +\infty)$，显然有 $0 \leqslant f_n(x) \leqslant 1$。等度连续性：对所有 n，由绝对值不等式易得 $|f_n(x) - f_n(y)| \leqslant |x - y|$，故序列等度连续。

然而，对任意固定的 $x \in [0, +\infty)$，当 $n > x + 1$ 时，恒有 $f_n(x) = 0$。因此点态极限为 $f(x) \equiv 0$。若该序列存在一致收敛的子序列 $\{f_{n_k}\}$，则它必定一致收敛于点态极限 0 函数。但 $\sup_{x \in [0, +\infty)} |f_{n_k}(x) - 0| = 1 \neq 0$。这与一致收敛于零矛盾，因此在无限区间上该序列不存在任何一致收敛的子序列。 □

3.2 Picard 定理

1. 求出下面微分方程的 Picard 序列中的 y_0, y_1, y_2:

$$y' = x - y^2.$$

Proof. 设初始条件为 $y(x_0) = y_0$。根据 Picard 迭代序列公式 $y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1}(t)) \mathrm{d}t$，已知 $f(x, y) = x - y^2$。

零次近似：

$$y_0(x) = y_0$$

第一次近似：

$$\begin{aligned} y_1(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} (t - y_0^2(t)) \mathrm{d}t \\ &= y_0 + \int_{x_0}^{x} (t - y_0^2) \mathrm{d}t \\ &= y_0 + \frac{1}{2}(x^2 - x_0^2) - y_0^2(x - x_0) \end{aligned}$$

第二次近似：

$$\begin{aligned} y_2(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} (t - y_1^2(t)) \mathrm{d}t \\ &= y_0 + \int_{x_0}^{x} \left[t - \left(y_0 + \frac{1}{2}(t^2 - x_0^2) - y_0^2(t - x_0) \right)^2 \right] \mathrm{d}t \end{aligned}$$

□

2. 求初值问题
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x + y + 1, \quad y(0) = 0$$
的 Picard 序列，并由此取极限求解.

Proof. 由题意知，初值条件为 $x_0 = 0, y_0 = 0$，且函数 $f(x, y) = x + y + 1$。Picard 迭代序列的构造公式为：
$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1}(t))\mathrm{d}t = \int_0^x (t + y_{n-1}(t) + 1)\mathrm{d}t$$

逐步计算 Picard 序列的前几项以寻找规律：零次近似：
$$y_0(x) = 0$$

第一次近似：
$$y_1(x) = \int_0^x (t + 0 + 1)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}x^2 + x = \frac{x^2}{2!} + x$$

第二次近似：
$$y_2(x) = \int_0^x \left(t + \left(\frac{1}{2}t^2 + t\right) + 1\right)\mathrm{d}t = \int_0^x \left(\frac{1}{2}t^2 + 2t + 1\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{6}x^3 + x^2 + x = \frac{x^3}{3!} + 2\frac{x^2}{2!} + x$$

第三次近似：
$$y_3(x) = \int_0^x \left(t + \left(\frac{1}{6}t^3 + t^2 + t\right) + 1\right)\mathrm{d}t = \int_0^x \left(\frac{1}{6}t^3 + t^2 + 2t + 1\right)\mathrm{d}t = \frac{x^4}{4!} + 2\frac{x^3}{3!} + 2\frac{x^2}{2!} + x$$

观察规律，通过数学归纳法易证第 n 次近似的表达式为：
$$y_n(x) = x + 2\sum_{k=2}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

接下来对 Picard 序列取极限。利用指数函数的麦克劳林展开式 $e^x = 1 + x + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$，可得 $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x - x - 1$。同时，对于任意固定的 x，当 $n \to \infty$ 时，$\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \to 0$。

对 $y_n(x)$ 两端取极限：
$$\begin{aligned}
y(x) &= \lim_{n\to\infty} y_n(x) \\
&= x + 2\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n} \frac{x^k}{k!}\right) + \lim_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \\
&= x + 2(e^x - x - 1) + 0 \\
&= 2e^x - x - 2
\end{aligned}$$

故该初值问题的解为：
$$y(x) = 2e^x - x - 2$$

□

3. 在定理 3.1 中，将函数 $f(x,y)$ 的条件用下面的条件替代：

$$|f(x,y)| \leqslant k(x)(1+|y|),$$

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)| \leqslant k(x)|y_1-y_2|,$$

其中 $k(x)$ 是可积函数。假设 $f(x,y)$ 是连续函数。证明：存在区间 $x_0 \leqslant x \leqslant x_0+\alpha$，使得 Picard 序列一致收敛到 Cauchy 问题

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x,y), \tag{3.1}$$

$$y(x_0) = y_0 \tag{3.2}$$

的解。

定理 3.1 被变成的版本如下：假设函数 $f(x,y)$ 是连续函数，且存在可积函数 $k(x)$ 使得 $|f(x,y)| \leqslant k(x)(1+|y|)$ 以及 $|f(x,y_1)-f(x,y_2)| \leqslant k(x)|y_1-y_2|$ 成立。则存在区间 $x_0 \leqslant x \leqslant x_0+\alpha$，使得初值问题 (3.1), (3.2) 的 Picard 序列在该区间上一致收敛到该 Cauchy 问题的解。

Proof. 根据已知，构造 Picard 序列：

$$y_0(x) = y_0, \quad y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1}(t))\mathrm{d}t, \quad n = 1, 2, \ldots$$

我们估计连续两项之差 $|y_n(x)-y_{n-1}(x)|$。令 $K(x) = \int_{x_0}^{x} k(t)\mathrm{d}t$，由微积分基本定理知 $K'(x) = k(x)$。当 $n=1$ 时，利用条件 $|f(x,y)| \leqslant k(x)(1+|y|)$：

$$|y_1(x)-y_0| \leqslant \int_{x_0}^{x} |f(t,y_0)|\mathrm{d}t \leqslant \int_{x_0}^{x} k(t)(1+|y_0|)\mathrm{d}t = (1+|y_0|)K(x)$$

当 $n=2$ 时，利用条件 $|f(x,y_1)-f(x,y_2)| \leqslant k(x)|y_1-y_2|$：

$$\begin{aligned}
|y_2(x)-y_1(x)| &\leqslant \int_{x_0}^{x} |f(t,y_1(t))-f(t,y_0(t))|\mathrm{d}t \\
&\leqslant \int_{x_0}^{x} k(t)|y_1(t)-y_0(t)|\mathrm{d}t \\
&\leqslant \int_{x_0}^{x} k(t)(1+|y_0|)K(t)\mathrm{d}t \\
&= (1+|y_0|)\int_{x_0}^{x} K(t)K'(t)\mathrm{d}t = (1+|y_0|)\frac{K(x)^2}{2!}
\end{aligned}$$

假设对于 $n-1$ 有 $|y_{n-1}(x)-y_{n-2}(x)| \leqslant (1+|y_0|)\frac{K(x)^{n-1}}{(n-1)!}$，则对于 n：

$$\begin{aligned}
|y_n(x)-y_{n-1}(x)| &\leqslant \int_{x_0}^{x} |f(t,y_{n-1}(t))-f(t,y_{n-2}(t))|\mathrm{d}t \\
&\leqslant \int_{x_0}^{x} k(t)|y_{n-1}(t)-y_{n-2}(t)|\mathrm{d}t \\
&\leqslant \int_{x_0}^{x} k(t)(1+|y_0|)\frac{K(t)^{n-1}}{(n-1)!}\mathrm{d}t \\
&= (1+|y_0|)\int_{x_0}^{x} \frac{K(t)^{n-1}}{(n-1)!}K'(t)\mathrm{d}t = (1+|y_0|)\frac{K(x)^n}{n!}
\end{aligned}$$

由数学归纳法可知，对所有 $n \geqslant 1$，该估计式均成立。

任取 $\alpha > 0$，使得 $k(x)$ 在区间 $[x_0, x_0+\alpha]$ 上可积。由于绝对值非负，$k(x) \geqslant 0$，故 $K(x)$ 在该区间上单调递增。记 $M = K(x_0+\alpha) = \int_{x_0}^{x_0+\alpha} k(t)\mathrm{d}t$，则对任意 $x \in [x_0, x_0+\alpha]$，有 $K(x) \leqslant M$。从而：

$$|y_n(x)-y_{n-1}(x)| \leqslant (1+|y_0|)\frac{M^n}{n!}$$

注意到正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(1+|y_0|)\frac{M^n}{n!}=(1+|y_0|)(e^M-1)$ 是收敛的。根据 Weierstrass 一致收敛判别法（M 判别法），函数项级数

$$y_0+\sum_{n=1}^{\infty}[y_n(x)-y_{n-1}(x)]$$

在区间 $[x_0,x_0+\alpha]$ 上绝对且一致收敛。由于该级数的前 n 项部分和正是 $y_n(x)$，因此 Picard 序列 $\{y_n(x)\}$ 在 $[x_0,x_0+\alpha]$ 上一致收敛于某个连续函数，记为 $y(x)$。

最后，证明极限函数 $y(x)$ 是 Cauchy 问题的解： 由 Lipschitz 条件 $|f(x,y_n(x))-f(x,y(x))|\leqslant k(x)|y_n(x)-y(x)|$，且 $y_n(x)$ 一致收敛于 $y(x)$，可知在区间 $[x_0,x_0+\alpha]$ 上，$f(x,y_n(x))$ 一致收敛于 $f(x,y(x))$。对 Picard 迭代积分方程两边取极限，极限与积分可交换顺序：

$$\lim_{n\to\infty}y_n(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}\lim_{n\to\infty}f(t,y_{n-1}(t))\mathrm{d}t$$

$$y(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(t,y(t))\mathrm{d}t$$

该积分方程与原 Cauchy 问题等价。两边对 x 求导得 $y'(x)=f(x,y(x))$，且代入 $x=x_0$ 得 $y(x_0)=y_0$。故存在区间 $[x_0,x_0+\alpha]$，使得 Picard 序列一致收敛到该 Cauchy 问题的解。原命题得证。 □

4. 利用 Banach 压缩映像原理证明 Picard 定理.

定义 1： X 为一个非空集合，在上面有一个实值双变量函数 $d(x,y): X\times X\to\mathbb{R}$ 满足：

(a) $d(x,y)\geqslant 0,\forall x,y\in X$，并且 $d(x,y)=0$ 当且仅当 $x=y$。（正定性）

(b) $d(x,y)=d(y,x)$ （对称性）

(c) $d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(z,y),\forall x,y,z\in X$ （三角不等式）

这里 d 称为 X 上面的一个距离（度量）。我们称 X 为一个距离空间（度量空间），通常记为 (X,d)。

定义 2： (X,d) 中我们称 $x_n\in X$ 收敛到 x_0，如果 $d(x_n,x_0)\to 0$。也通常记为 $x_n\to x_0$。

定义 3： (X,d) 中序列 x_n 称为 Cauchy 列，如果 $d(x_n,x_m)\to 0,(n,m\to+\infty)$。

定义 4： (X,d) 称为完备的，如果其中所有的 Cauchy 列都收敛。

常见的距离空间的例子：$X=\mathbb{R}^n, d(x,y)=|x-y|=\sqrt{\sum_{1\leqslant i\leqslant n}(x_i-y_i)^2}$。还可以考虑 $X=\mathbb{R}^n, d(x,y)=\max_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i-y_i|$。

下面证明：

4-1. (Banach 不动点定理 / 压缩映射原理) (X,d) 为一个完备的度量空间，$T:(X,d)\to(X,d)$ 为一个映射，并且是压缩的。即存在 $\alpha\in(0,1)$ 使得 $d(Tx,Ty)\leqslant\alpha d(x,y)$。证明 T 在 X 上存在唯一的不动点。即证明 $Tx=x$ 有解且唯一。

Proof. 任取 $x_0\in X$，构造序列 $x_{n+1}=T(x_n)$。由压缩映射条件，有：

$$d(x_{n+1},x_n)=d(Tx_n,Tx_{n-1})\leqslant\alpha d(x_n,x_{n-1})$$

递推可得 $d(x_{n+1},x_n)\leqslant\alpha^n d(x_1,x_0)$。对于任意 $m>n$，利用三角不等式：

$$\begin{aligned} d(x_m,x_n) &\leqslant d(x_m,x_{m-1})+d(x_{m-1},x_{m-2})+\cdots+d(x_{n+1},x_n)\\ &\leqslant(\alpha^{m-1}+\alpha^{m-2}+\cdots+\alpha^n)d(x_1,x_0)\\ &\leqslant\frac{\alpha^n}{1-\alpha}d(x_1,x_0)\end{aligned}$$

因为 $\alpha<1$，当 $n\to\infty$ 时，$\frac{\alpha^n}{1-\alpha}\to 0$。故 $\{x_n\}$ 为 Cauchy 列。因为 X 是完备的，设该 Cauchy 列收敛于 $y_0\in X$。又因为 T 是压缩映射，必然连续，对 $x_{n+1}=T(x_n)$ 两侧取极限：

$$\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim_{n\to\infty}T(x_n)\implies y_0=T(y_0)$$

故存在不动点。证毕。

下证唯一性：若存在两个不动点 x_1,x_2，即 $T(x_1)=x_1,T(x_2)=x_2$。则 $d(x_1,x_2)=d(T(x_1),T(x_2))\leqslant\alpha d(x_1,x_2)$。因为 $\alpha<1$，必有 $d(x_1,x_2)=0$，即 $x_1=x_2$。证毕。 □

4-2. 考虑 $X=C[a,b]=\{[a,b]$ 上连续函数的全体$\}$，

$$d(f,g):=\max_{x\in[a,b]}|f(x)-g(x)|,$$

验证这是一个度量空间，并且是完备的。给定一个函数 $f_0\in X$，考虑 X 的子集 $X_0=\{f\in X,d(f,f_0)\leqslant b\}$。验证 (X_0,d) 为一个完备的距离空间。【注：X_0 相当于以 f_0 为心，半径为 b 的闭球。】

Proof. 验证度量空间（距离的三个性质）：正定性：对 $\forall f,g\in X$，$d(f,g)=\max_{x\in[a,b]}|f(x)-g(x)|\geqslant 0$ 显然成立。$d(f,g)=0\iff\forall x\in[a,b],|f(x)-g(x)|=0\iff f=g$。对称性：因为 $|f(x)-g(x)|=|g(x)-f(x)|$，故 $d(f,g)=d(g,f)$。三角不等式：对 $\forall f,g,h\in X$，有 $|f(x)-g(x)|\leqslant|f(x)-h(x)|+|h(x)-g(x)|$，两边取最大值即得 $d(f,g)\leqslant d(f,h)+d(h,g)$。

验证完备性:对 X 中的任意 Cauchy 列 $\{f_n\}$,即 $\forall\varepsilon>0$,$\exists N$,当 $m,n>N$ 时,$d(f_m,f_n)=\max_{x\in[a,b]}|f_m(x)-f_n(x)|<\varepsilon$。对于固定的 $x_0\in[a,b]$,数列 $\{f_n(x_0)\}$ 是实数域 $\mathbb{R}$ 上的 Cauchy 列。由 $\mathbb{R}$ 的完备性,存在实数 c 使得 $\lim_{n\to\infty}f_n(x_0)=c$。定义函数 $f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)$。因为 $\{f_n\}$ Cauchy 列,这意味着 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 f(Cauchy 列的定义就是一致收敛的定义)。由连续函数序列一致收敛的极限函数仍连续的性质,极限函数 $f\in C[a,b]$,即 $f\in X$。且 $d(f_n,f)=\lim_{m\to\infty}d(f_n,f_m)=0$,故 Cauchy 列在 X 中收敛。因此 X 是完备的。

由于 X_0 是完备度量空间 X 中的闭集,完备空间中的闭子集依然是完备的。故 X_0 是完备的距离空间。 □

4-3. 用 Banach 不动点定理来证明 Picard-Lindelof 定理。
具体来讲,考虑初值问题 $y'=f(x,y),y(x_0)=y_0$。

$$D=\{(x,y),|x-x_0|\leqslant a,|y-y_0|\leqslant b\}$$

f 在 D 上连续,$M=\sup_{(x,y)\in D}|f|$,并且 f 关于第二个变量为 Lipschitz 的,

$$|f(x,y)-f(x,z)|\leqslant L|y-z|,\quad \forall(x,y),(x,z)\in D.$$

考察积分方程

$$y(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(s,y(s))\mathrm{d}s$$

取定一个 $h<\min(a,\frac{b}{M},\frac{1}{L})$,$X=C[x_0-h,x_0+h]$,定义距离 d 如第二题。取 $X_0\subset X$ 定义为

$$X_0=\{y(x)\in X,d(y(x),y_0)\leqslant b\}$$

定义 T

$$Ty=y_0+\int_{x_0}^{x}f(s,y(s))\mathrm{d}s$$

验证 (a) T 将 X_0 映射到自身;(b) T 在 X_0 上是压缩映射。

Proof. (a) 若 $y\in X_0$,即 $d(y,y_0)\leqslant b$,这意味着对于所有的 $s\in[x_0-h,x_0+h]$,点 $(s,y(s))$ 均在区域 D 内。计算 Ty 与 y_0 的距离:

$$\begin{aligned}
d(Ty,y_0)&=\max_{x\in[x_0-h,x_0+h]}|Ty(x)-y_0|\\
&=\max_{x\in[x_0-h,x_0+h]}\left|\int_{x_0}^{x}f(s,y(s))\mathrm{d}s\right|\\
&\leqslant\max_{x\in[x_0-h,x_0+h]}\left|\int_{x_0}^{x}|f(s,y(s))|\mathrm{d}s\right|\\
&\leqslant\max_{x\in[x_0-h,x_0+h]}M|x-x_0|\\
&\leqslant Mh
\end{aligned}$$

由于取定的 $h<\frac{b}{M}$,故 $Mh\leqslant b$。因此 $d(Ty,y_0)\leqslant b$,即 T 将 X_0 映射为自身。

(b) 验证压缩映射:对于任意 $y_1,y_2\in X_0$,

$$\begin{aligned}
d(Ty_1,Ty_2)&=\max_{x\in[x_0-h,x_0+h]}|Ty_1(x)-Ty_2(x)|\\
&=\max_{x\in[x_0-h,x_0+h]}\left|\int_{x_0}^{x}(f(s,y_1(s))-f(s,y_2(s)))\mathrm{d}s\right|\\
&\leqslant\max_{x\in[x_0-h,x_0+h]}\left|\int_{x_0}^{x}|f(s,y_1(s))-f(s,y_2(s))|\mathrm{d}s\right|\\
&\leqslant\max_{x\in[x_0-h,x_0+h]}\left|\int_{x_0}^{x}L|y_1(s)-y_2(s)|\mathrm{d}s\right|
\end{aligned}$$

由于 $|y_1(s) - y_2(s)| \leqslant d(y_1, y_2)$ 对所有 s 成立，可以将其提出来：

$$\begin{aligned} d(Ty_1, Ty_2) &\leqslant L \cdot d(y_1, y_2) \cdot \max_{x \in [x_0 - h, x_0 + h]} |x - x_0| \\ &= hL \cdot d(y_1, y_2) \end{aligned}$$

因为我们取定的 $h < \frac{1}{L}$，故 $\alpha = hL < 1$。这证明了 T 是一个压缩映射。

由 Banach 不动点定理，算子 T 在完备度量空间 X_0 内有且仅有一个不动点，该不动点即为初值问题的唯一解。 □

1、为什么这里要在 X_0 中使用压缩映射原理，而不是在 X 中使用？
答：若在整个 X 空间中使用，函数 $y(x)$ 的取值可能会很大，导致积分过程中的点 $(s, y(s))$ 跑出定义域 D 的范围，从而无法使用有界性条件 M 和 Lipschitz 常数 L。
2、注意用压缩映射原理得到的存在区间 h，与书上证明得到的区间的不同。
答：使用压缩映射原理时，严格要求收缩系数 $\alpha < 1$（即本题中的 $hL < 1$），因此相比于构造法的证明，这里多出了一个限制条件 $h < \frac{1}{L}$。

5. 假设函数 $f(x,y)$ 在闭区域 $D=\{(x,y)|0\leqslant x\leqslant a,|y|\leqslant b\}$ 上连续. 进一步，假设对于任意的 $y_1\leqslant y_2$，有 $f(x,y_1)\leqslant f(x,y_2)$，且 $f(x,0)\geqslant 0$. 对于初值问题

$$\begin{cases} y'=f(x,y), \\ y(0)=0, \end{cases}$$

构造 Picard 序列

$$y_0(x)\equiv 0, \quad y_n(x)=\int_0^x f(s,y_{n-1}(s))\mathrm{d}s, \quad n=1,2,\cdots.$$

证明：该序列在区间 $0\leqslant x\leqslant h$ 上收敛到上述初值问题的解，其中

$$h=\min\left\{a,\frac{b}{M}\right\}, \quad M=\max_{(x,y)\in D}|f(x,y)|.$$

Proof. 分步证明如下：

第一步：证明 Picard 序列 $\{y_n(x)\}$ 在区间 $[0,h]$ 上有定义且一致有界：

使用数学归纳法。对于 $n=0$，$y_0(x)\equiv 0$，显然有 $|y_0(x)|=0\leqslant b$，即点 $(x,y_0(x))\in D$。假设对于 $n=k-1$ 时 $|y_{k-1}(x)|\leqslant b$ 成立。则对于 $n=k$，

$$|y_k(x)|=\left|\int_0^x f(s,y_{k-1}(s))\mathrm{d}s\right|\leqslant\int_0^x|f(s,y_{k-1}(s))|\mathrm{d}s\leqslant\int_0^x M\mathrm{d}s=Mx$$

由于 $x\in[0,h]$，且 $h\leqslant\frac{b}{M}$，故 $Mx\leqslant Mh\leqslant b$。因此，对所有 $n\geqslant 0$ 和 $x\in[0,h]$，有 $|y_n(x)|\leqslant b$，序列有定义且一致有界。

第二步：证明序列 $\{y_n(x)\}$ 在 $[0,h]$ 上单调递增：

使用数学归纳法。对于 $n=1$，由于已知 $f(x,0)\geqslant 0$，有：

$$y_1(x)=\int_0^x f(s,0)\mathrm{d}s\geqslant 0=y_0(x)$$

假设对于 $n=k$ 时有 $y_{k-1}(x)\leqslant y_k(x)$ 成立。由 f 关于第二个变量的单调性条件（对于 $y_1\leqslant y_2$ 有 $f(x,y_1)\leqslant f(x,y_2)$），可得 $f(s,y_{k-1}(s))\leqslant f(s,y_k(s))$。则对于 $n=k+1$：

$$y_{k+1}(x)-y_k(x)=\int_0^x[f(s,y_k(s))-f(s,y_{k-1}(s))]\mathrm{d}s\geqslant 0$$

故 $y_{k+1}(x)\geqslant y_k(x)$。由此可知 $\{y_n(x)\}$ 是一个单调递增的函数序列。

第三步：证明序列的一致收敛性：

对于固定的 $x\in[0,h]$，实数列 $\{y_n(x)\}$ 单调递增且有上界 b，由单调有界定理，该序列必定逐点收敛。设其点态极限函数为 $y(x)$。考察序列的等度连续性：对于任意 $x_1,x_2\in[0,h]$ 且不失一般性设 $x_1<x_2$，

$$|y_n(x_2)-y_n(x_1)|=\left|\int_{x_1}^{x_2}f(s,y_{n-1}(s))\mathrm{d}s\right|\leqslant\int_{x_1}^{x_2}|f(s,y_{n-1}(s))|\mathrm{d}s\leqslant M|x_2-x_1|$$

这表明 $\{y_n(x)\}$ 在 $[0,h]$ 上等度连续。由 Arzelà-Ascoli 定理，一致有界且等度连续的序列存在一个一致收敛的子序列 $\{y_{n_k}(x)\}$。设该子序列一致收敛于连续函数 $\tilde{y}(x)$。由于点态极限是唯一的，必定有 $y(x)\equiv\tilde{y}(x)$。因此，点态极限函数 $y(x)$ 是连续的。根据 Dini 定理，若一个定义在紧致区间 $[0,h]$ 上的单调递增连续函数序列点态收敛于一个连续函数，则该收敛必为一致收敛。故 Picard 序列 $\{y_n(x)\}$ 在 $[0,h]$ 上一致收敛于 $y(x)$。

第四步：证明极限函数 $y(x)$ 是原初值问题的解：

由于 $f(x,y)$ 在紧致闭区域 D 上连续，故 f 在 D 上一致连续。因为 $y_n(x)$ 在 $[0,h]$ 上一致收敛于 $y(x)$，所以 $f(x,y_n(x))$ 在 $[0,h]$ 上一致收敛于 $f(x,y(x))$。对 Picard 迭代方程两边取极限：

$$\lim_{n\to\infty}y_n(x)=\lim_{n\to\infty}\int_0^x f(s,y_{n-1}(s))\mathrm{d}s$$

由于一致收敛，极限号可以与积分号交换：

$$y(x)=\int_0^x \lim_{n\to\infty} f(s,y_{n-1}(s))\mathrm{d}s=\int_0^x f(s,y(s))\mathrm{d}s$$

该积分方程等价于原 Cauchy 初值问题。对其两边求导可得 $y'(x)=f(x,y(x))$，且显然有 $y(0)=0$。原命题得证。 □

3.3 Peano 定理

1. 考虑与 Cauchy 问题 (3.1), (3.2) 等价的积分方程

$$y(x)=y_0+\int_{x_0}^x f(s,y(s))\mathrm{d}s.$$

在区间 $I=[x_0,x_0+h]$ 上（h 的意义与 Picard 定理中的相同）构造序列 $\{y_n(x)\}$ 如下：对于每个正整数 n，将区间 I 等分，其分点为 $x_k=x_0+kd_n$，其中 $d_n=\frac{h}{n},k=1,2,\cdots,n-1$，并记 $x_n=x_0+h$，进而定义

$$y_n(x)=\begin{cases} y_0, & x\in[x_0,x_1] \\ y_0+\int_{x_0}^{x-d_n} f(s,y_n(s))\mathrm{d}s, & x\in[x_1,x_0+h], \end{cases} \qquad n=1,2,\cdots.$$

称序列

$$y_1(x),y_2(x),\cdots,y_n(x),\cdots$$

为 Tonelli 序列. (1) 用 Tonelli 序列和 Ascoli-Arzelà 引理来证明 Peano 定理. (2) 用 Tonelli 序列来证明 Picard 定理，即在 Picard 定理的条件下，Tonelli 序列是一致收敛的.

Proof. 根据 Picard 定理与 Peano 定理的设定，函数 $f(x,y)$ 在闭矩形区域 $D=\{(x,y)\mid |x-x_0|\leqslant a,|y-y_0|\leqslant b\}$ 上连续，且 $M=\max_{(x,y)\in D}|f(x,y)|$，$h=\min\{a,\frac{b}{M}\}$。对于任意 $x\in[x_0,x_0+h]$，Tonelli 序列可统一表示为：

$$y_n(x)=y_0+\int_{x_0}^{\max(x_0,x-d_n)} f(s,y_n(s))\mathrm{d}s$$

(1) 用 Tonelli 序列和 Ascoli-Arzelà 引理证明 Peano 定理：

第一步：证明序列 $\{y_n(x)\}$ 在 $I=[x_0,x_0+h]$ 上有定义且一致有界。当 $x\in[x_0,x_1]$ 时，$y_n(x)=y_0$，显然 $|y_n(x)-y_0|=0\leqslant b$ 成立。假设对所有 $s\leqslant x-d_n$ 均有 $|y_n(s)-y_0|\leqslant b$，则对于 $x\in I$：

$$|y_n(x)-y_0|\leqslant\int_{x_0}^{\max(x_0,x-d_n)}|f(s,y_n(s))|\mathrm{d}s\leqslant M(\max(x_0,x-d_n)-x_0)\leqslant M(x-x_0)\leqslant Mh\leqslant b$$

故 $y_n(x)$ 在区间 I 上良定，且 $|y_n(x)|\leqslant|y_0|+b$，即序列一致有界。

第二步：证明序列 $\{y_n(x)\}$ 在 I 上等度连续。对任意 $x',x''\in I$，不妨设 $x'<x''$：

$$\begin{aligned}|y_n(x'')-y_n(x')|&=\left|\int_{\max(x_0,x'-d_n)}^{\max(x_0,x''-d_n)} f(s,y_n(s))\mathrm{d}s\right|\\&\leqslant M|\max(x_0,x''-d_n)-\max(x_0,x'-d_n)|\\&\leqslant M(x''-x')\end{aligned}$$

这说明所有的 $y_n(x)$ 都满足 Lipschitz 常数为 M 的 Lipschitz 条件，故 $\{y_n(x)\}$ 在 I 上等度连续。

第三步：运用 Ascoli-Arzelà 引理及取极限。由一致有界且等度连续，存在一致收敛的子序列 $\{y_{n_k}(x)\}$，设其收敛于连续函数 $y(x)$。对 Tonelli 序列取 $n_k\to\infty$（此时 $d_{n_k}\to 0$）：

$$y_{n_k}(x)=y_0+\int_{x_0}^x f(s,y_{n_k}(s))\mathrm{d}s-\int_{\max(x_0,x-d_{n_k})}^x f(s,y_{n_k}(s))\mathrm{d}s$$

尾项积分的绝对值 $\leqslant Md_{n_k} \to 0$。由于 $f(x,y)$ 在紧集上一致连续，极限可与积分交换：

$$y(x) = \lim_{k\to\infty} y_{n_k}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s,y(s))\mathrm{d}s$$

极限函数 $y(x)$ 是积分方程的解。Peano 定理（解的存在性）得证。

(2) 用 Tonelli 序列证明 Picard 定理：

在 Picard 定理条件下，函数 f 还满足 Lipschitz 条件：存在 $L>0$，使得 $|f(x,y_1)-f(x,y_2)| \leqslant L|y_1-y_2|$。

下证 Tonelli 序列一致收敛（存在性）：任取正整数 $n \leqslant m$，则 $d_m \leqslant d_n$。对任意 $x \in I$：

$$\begin{aligned}
|y_n(x)-y_m(x)| &\leqslant \int_{x_0}^{\max(x_0,x-d_n)} |f(s,y_n(s))-f(s,y_m(s))|\mathrm{d}s + \int_{\max(x_0,x-d_n)}^{\max(x_0,x-d_m)} |f(s,y_m(s))|\mathrm{d}s \\
&\leqslant L\int_{x_0}^{x} |y_n(s)-y_m(s)|\mathrm{d}s + M(d_n-d_m) \\
&\leqslant M\frac{h}{n} + L\int_{x_0}^{x} |y_n(s)-y_m(s)|\mathrm{d}s
\end{aligned}$$

应用 Gronwall 不等式，可得：

$$|y_n(x)-y_m(x)| \leqslant \frac{Mh}{n}\mathrm{e}^{\int_{x_0}^{x} L\mathrm{d}s} \leqslant \frac{Mh}{n}\mathrm{e}^{Lh}$$

当 $n,m\to\infty$ 时，上式趋于 0。表明 $\{y_n(x)\}$ 是连续函数空间的一致 Cauchy 列，故在区间 I 上一致收敛于极限函数 $y(x)$，且 $y(x)$ 是方程的解。

下证解的唯一性：假设存在两个解 $y(x)$ 和 $z(x)$，满足：

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s,y(s))\mathrm{d}s, \quad z(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s,z(s))\mathrm{d}s$$

两式相减并取绝对值，利用 Lipschitz 条件：

$$\begin{aligned}
|y(x)-z(x)| &= \left|\int_{x_0}^{x} [f(s,y(s))-f(s,z(s))]\mathrm{d}s\right| \\
&\leqslant \int_{x_0}^{x} |f(s,y(s))-f(s,z(s))|\mathrm{d}s \\
&\leqslant L\int_{x_0}^{x} |y(s)-z(s)|\mathrm{d}s
\end{aligned}$$

再次应用 Gronwall 不等式：

$$|y(x)-z(x)| \leqslant 0\cdot \mathrm{e}^{\int_{x_0}^{x} L\mathrm{d}s} = 0$$

因此在区间 I 上恒有 $|y(x)-z(x)|=0$，即 $y(x)\equiv z(x)$。解存在且唯一，Picard 定理得证。 □

2. 令函数

$$\alpha(x) = \begin{cases} 0, & x=0, \\ \int_0^x \mathrm{e}^{-\frac{1}{s^2}}\mathrm{d}s, & 0<x\leqslant 1. \end{cases}$$

在条形闭区域 $G: 0\leqslant x\leqslant 1, -\infty<y<+\infty$ 上定义连续函数

$$f(x,y) = \begin{cases} x, & 0\leqslant x\leqslant 1, y>\alpha(x), \\ x\cos\frac{\pi}{x}, & 0<x\leqslant 1, y=0, \\ -x, & 0\leqslant x\leqslant 1, y<-\alpha(x). \end{cases}$$

考虑初值问题

$$\begin{cases} y' = f(x,y), \\ y(0)=0. \end{cases}$$

将区间 $0\leqslant x\leqslant 1$ 分成 n 等份，仿照本节的方法构造一条 Euler 折线 $y=\phi_n(x)$ $(0\leqslant x\leqslant 1)$。证明：当 $\frac{1}{n}\leqslant x\leqslant 1$ 时，有 (1) 若 n 为偶数，则 $\phi_n(x)\geqslant \alpha(x)$; (2) 若 n 为奇数，则 $\phi_n(x)\leqslant -\alpha(x)$. 由此可知 Euler 序列 $\{\phi_n(x)\}$ 是不收敛的。进一步，证明该初值问题的解不是唯一的。

Proof. 考察 Euler 折线 $\{\phi_n(x)\}$ 的构造。将区间 $[0,1]$ 分成 n 等份，步长 $h=\frac{1}{n}$，节点 $x_k=\frac{k}{n}$ $(k=0,1,\ldots,n)$。由于 $f(x,y)$ 连续，易知 $f(0,0)=\lim_{x\to0^+}x\cos\frac{\pi}{x}=0$。根据向前 Euler 公式 $y_{k+1}=y_k+f(x_k,y_k)h$，且初值 $y_0=0$：

第一步：$y_1=y_0+f(x_0,y_0)h=0+f(0,0)\frac{1}{n}=0$。第二步：此时点 $(x_1,y_1)=(\frac{1}{n},0)$ 处于 $y=0$ 的设定上，故有

$$f(x_1,y_1)=x_1\cos\frac{\pi}{x_1}=\frac{1}{n}\cos(n\pi)=\frac{(-1)^n}{n}$$

从而可得 $y_2=y_1+f(x_1,y_1)h=0+\frac{(-1)^n}{n}\cdot\frac{1}{n}=\frac{(-1)^n}{n^2}$。

(1) 证明 n 为偶数时的情况：

此时 $y_2=\frac{1}{n^2}$。由于被积函数 e^{-1/s^2} 随 $s\to0$ 衰减极快，易知对于 $n\geqslant2$，都有 $y_2=\frac{1}{n^2}>\int_0^{2/n}\mathrm{e}^{-1/s^2}\mathrm{d}s=\alpha(x_2)$。因此，点 (x_2,y_2) 已经彻底跳出中段区域，落在上方 $y>\alpha(x)$ 中。假设对于某个 $k\geqslant2$ 有 $y_k>\alpha(x_k)$，则在该点 $f(x_k,y_k)=x_k$。由 Euler 公式可得 $y_{k+1}=y_k+x_kh$。由于 e^{-1/x^2} 远小于 x，必然有：

$$y_{k+1}-y_k=x_kh>h\mathrm{e}^{-1/x_{k+1}^2}>\int_{x_k}^{x_{k+1}}\mathrm{e}^{-1/s^2}\mathrm{d}s=\alpha(x_{k+1})-\alpha(x_k)$$

从而 $y_{k+1}>\alpha(x_{k+1})$。由数学归纳法可知，对于所有 $k\geqslant2$ 均有 $y_k>\alpha(x_k)$。由于 $\alpha(x)$ 为严格凸函数，而 Euler 折线在区间内是线性连接的，连接凸函数上方两点的线段恒在该凸函数上方，即当 $x\geqslant x_2$ 时 $\phi_n(x)\geqslant\alpha(x)$ 严格成立。

(2) 证明 n 为奇数时的情况：

此时 $y_2=-\frac{1}{n^2}$。同理可证 $y_2<-\alpha(x_2)$，即点 (x_2,y_2) 落在下方区域 $y<-\alpha(x)$ 中，此时 $f(x_2,y_2)=-x_2$。根据对称的推导过程，运用数学归纳法可得对于所有 $k\geqslant2$，均有 $y_k<-\alpha(x_k)$，且对于 $x\geqslant x_2$ 时 $\phi_n(x)\leqslant-\alpha(x)$ 恒成立。

结论：Euler 序列的不收敛性

当 $n\to\infty$ 时，由于对于 $x>0$ 有 $\alpha(x)>0$，偶数子序列的折线恒在其上方，而奇数子序列的折线恒在其下方。序列随着 n 的奇偶性发生上下震荡，不存在唯一的极限函数，故 Euler 序列 $\{\phi_n(x)\}$ 在区间上是不收敛的。

证明解不是唯一的：

考虑函数 $y_1(x)=\frac{1}{2}x^2$ 和 $y_2(x)=-\frac{1}{2}x^2$。由于 $\mathrm{e}^{-1/s^2}<s$ 对 $s>0$ 恒成立，积分可得 $\alpha(x)=\int_0^x\mathrm{e}^{-1/s^2}\mathrm{d}s<\int_0^x s\mathrm{d}s=\frac{1}{2}x^2$。所以抛物线 $y_1(x)=\frac{1}{2}x^2$ 恒处于区域 $y>\alpha(x)$ 中，代入函数：

$$y_1'(x)=x,\quad f(x,y_1(x))=x$$

二者相等且满足初始条件 $y_1(0)=0$。故 $y_1(x)$ 是初值问题的一个解。同理，曲线 $y_2(x)=-\frac{1}{2}x^2$ 恒处于区域 $y<-\alpha(x)$ 中：

$$y_2'(x)=-x,\quad f(x,y_2(x))=-x$$

满足方程且 $y_2(0)=0$。故 $y_2(x)$ 也是初值问题的一个解。存在至少两个不同的解，证明了该初值问题的解不是唯一的。 □

3.4 解的延伸

1. 对于怎样的 a，下列微分方程的每个解都能延伸到无穷区间 $(-\infty,+\infty)$ 上？

(1) $y'=|y|^a$;

(2) $y'=(y^2+\mathrm{e}^x)^a$;

(3) $y'=|y|^{a-1}+x|y|^{\frac{2a}{3}}$.

Proof. **(1)** 对于 $y'=|y|^a$：首先，为了使右端函数在 $y=0$ 处连续且不产生奇点，必须要求 $a\geqslant0$。若 $a>1$，不妨设初值 $y(x_0)=y_0>0$，此时方程化为 $y'=y^a$。分离变量并积分：

$$\int_{y_0}^{y}\frac{\mathrm{d}s}{s^a}=x-x_0$$

当 $y \to +\infty$ 时，由于 $a > 1$，反常积分收敛于有限值 $\frac{y_0^{1-a}}{a-1}$。这意味着 x 会在有限区间内停止，解无法延伸至无穷。若 $0 \leqslant a \leqslant 1$，由于 $|y|^a \leqslant |y| + 1$，解的增长速度受一次函数控制，不会在有限区间内趋于无穷。由延伸定理可延伸至 $(-\infty, +\infty)$。综上，需满足：$0 \leqslant a \leqslant 1$。

(2) 对于 $y' = (y^2 + e^x)^a$：由于 $y^2 + e^x \geqslant e^x > 0$，因此对于任意实数 a，右端函数在整个平面上均连续，不会产生奇点。

若 $a > \frac{1}{2}$，则显然有：

$$y' = (y^2 + e^x)^a \geqslant (y^2)^a = |y|^{2a}$$

对于 $y_0 > 0$ 的解，分离变量有 $\frac{dy}{y^{2a}} \geqslant dx$。同理积分后，由于 $2a > 1$，左侧积分收敛，证明解会在有限时间内爆破，不能延伸到无穷。

若 $a \leqslant \frac{1}{2}$，利用基本不等式 $\sqrt{A+B} \leqslant \sqrt{A} + \sqrt{B}$，有 $y' \leqslant (y^2 + e^x)^{1/2} \leqslant |y| + e^{x/2}$，关于 y 的增长受到一次函数的控制，解不会爆破，可延展至无穷。综上，需满足：$a \leqslant \frac{1}{2}$。

(3) 对于 $y' = |y|^{a-1} + x|y|^{\frac{2a}{3}}$：

首先，为了使方程右端在 $y = 0$ 处连续无奇点，各项中 y 的指数必须非负：

$$a - 1 \geqslant 0 \implies a \geqslant 1$$

$$\frac{2a}{3} \geqslant 0 \implies a \geqslant 0$$

同时满足，必须有 $a \geqslant 1$。其次，为了不发生有限时间爆破，各项关于 y 的指数不能大于 1（否则通过比较定理可放缩为 $\geqslant Cy^k$ 形式，导致积分收敛）：

$$a - 1 \leqslant 1 \implies a \leqslant 2$$

$$\frac{2a}{3} \leqslant 1 \implies a \leqslant \frac{3}{2}$$

同时满足，必须有 $a \leqslant \frac{3}{2}$。取连续性与不爆破条件的交集，最终需满足：$1 \leqslant a \leqslant \frac{3}{2}$。 □

补充定义了 $0^0 = 1$，如果我们认为 0^0 没有定义，那第一问的 $a = 0$ 和第三问的 $a = 1$ 都不能够取到。

2. 证明：初值问题

$$\begin{cases} y' = x^3 - y^3, \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

的解在区间 $[x_0, +\infty)$ 上存在.

Proof. 由于右端函数 $f(x, y) = x^3 - y^3$ 及其偏导数 $\frac{\partial f}{\partial y} = -3y^2$ 在整个 (x, y) 平面上连续，满足局部 Lipschitz 条件（关于 y 连续可微则存在局部 Lip 条件）。由解的存在唯一性定理及延伸定理，初值问题的解 $y = \phi(x)$ 存在，且可向右延伸至最大区间 $[x_0, \beta)$。

假设 $\beta < +\infty$，根据解的延伸定理，必有 $\lim_{x \to \beta^-} |\phi(x)| = +\infty$。下面证明 $\phi(x)$ 在 $[x_0, \beta)$ 上有界，从而导出矛盾。

先证 $\phi(x)$ 在上方有界。令 $M = \max\{\beta, y_0, 0\}$。若在区间 $[x_0, \beta)$ 内 $\phi(x) > M$，则有 $\phi(x) > x$ 且 $\phi(x) > 0$。此时 $\phi'(x) = x^3 - \phi^3(x) < 0$，解曲线严格单调递减。这意味着 $\phi(x)$ 无法单调递增穿越该区域至 $+\infty$，即对于所有 $x \in [x_0, \beta)$，恒有 $\phi(x) \leqslant M$。

再证 $\phi(x)$ 在下方有界。设 $m = \min_{x \in [x_0, \beta]} x^3 = x_0^3$。若 $\phi(x) \leqslant 0$，则 $-\phi^3(x) \geqslant 0$，从而有微分不等式 $\phi'(x) = x^3 - \phi^3(x) \geqslant x^3 \geqslant m$。若 $\lim_{x \to \beta^-} \phi(x) = -\infty$，则必定存在 $x_1 \in [x_0, \beta)$，使得当 $x \in [x_1, \beta)$ 时，恒有 $\phi(x) \leqslant 0$。对 $\phi'(x) \geqslant m$ 在区间 $[x_1, x]$ 上积分得：

$$\phi(x) - \phi(x_1) \geqslant m(x - x_1)$$

$$\phi(x) \geqslant \phi(x_1) + m(x - x_1) \geqslant \phi(x_1) - |m|(\beta - x_0)$$

此结果表明 $\phi(x)$ 存在一个常数下界，与 $\phi(x) \to -\infty$ 矛盾。因此 $\phi(x)$ 在下方也有界。

综上，若 $\beta < +\infty$，解 $\phi(x)$ 在 $[x_0, \beta)$ 上有界，这与最大存在区间的边界性质矛盾。故假设不成立，必有 $\beta = +\infty$。原初值问题的解在区间 $[x_0, +\infty)$ 上存在。 □

3. 考虑初值问题

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(0) = y_0, \end{cases}$$

其中函数 $f(x, y)$ 在闭区域 $0 \leqslant x \leqslant a, -\infty < y < +\infty$ 上连续，且满足

$$|f(x, y) - f(x, z)| \leqslant \frac{q}{x}|y - z|,$$

这里 q $(0 < q < 1)$ 为常数. 证明: 该初值问题的解在区间 $[0, a]$ 上是存在且唯一的.

Proof. 由于右端函数满足的 Lipschitz 条件中带有奇点 $\frac{1}{x}$，我们通过构造 Picard 迭代序列来证明解的存在性与唯一性。

第一步：构造 Picard 序列并估计相邻两项之差

定义 Picard 序列为:

$$y_0(x) = y_0$$

$$y_n(x) = y_0 + \int_0^x f(s, y_{n-1}(s))\mathrm{d}s, \quad n = 1, 2, \cdots$$

由于 $f(x, y)$ 在闭区域上连续，函数 $f(x, y_0)$ 在 $[0, a]$ 上也是连续的。令 $M = \max_{0 \leqslant x \leqslant a} |f(x, y_0)|$。当 $n = 1$ 时：

$$|y_1(x) - y_0(x)| = \left|\int_0^x f(s, y_0)\mathrm{d}s\right| \leqslant \int_0^x |f(s, y_0)|\mathrm{d}s \leqslant \int_0^x M\mathrm{d}s = Mx$$

假设对于 $n = k$，有 $|y_k(x) - y_{k-1}(x)| \leqslant Mq^{k-1}x$ 成立，则对于 $n = k + 1$：

$$\begin{aligned} |y_{k+1}(x) - y_k(x)| &= \left|\int_0^x [f(s, y_k(s)) - f(s, y_{k-1}(s))]\mathrm{d}s\right| \\ &\leqslant \int_0^x |f(s, y_k(s)) - f(s, y_{k-1}(s))|\mathrm{d}s \\ &\leqslant \int_0^x \frac{q}{s}|y_k(s) - y_{k-1}(s)|\mathrm{d}s \\ &\leqslant \int_0^x \frac{q}{s}(Mq^{k-1}s)\mathrm{d}s \\ &= Mq^k \int_0^x \mathrm{d}s = Mq^k x \end{aligned}$$

由数学归纳法可知，对所有正整数 n 及 $x \in [0, a]$，均有：

$$|y_n(x) - y_{n-1}(x)| \leqslant Mq^{n-1}x$$

第二步：证明序列的一致收敛性

考察函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}[y_n(x) - y_{n-1}(x)]$。其通项的绝对值满足 $|y_n(x) - y_{n-1}(x)| \leqslant Mq^{n-1}a$。由于 $0 < q < 1$，正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} Maq^{n-1}$ 是收敛的几何级数。根据 Weierstrass M 判别法，该函数项级数在区间 $[0, a]$ 上绝对且一致收敛。由于 $y_n(x) = y_0 + \sum_{k=1}^{n}[y_k(x) - y_{k-1}(x)]$，Picard 序列 $\{y_n(x)\}$ 在 $[0, a]$ 上一致收敛。设其极限函数为 $y(x)$。由于每一项 $y_n(x)$ 均连续，极限函数 $y(x)$ 也在 $[0, a]$ 上连续。

第三步：证明极限函数是初值问题的解

我们要对迭代积分式取极限。首先估计 $y_{n-1}(x)$ 与极限函数 $y(x)$ 的误差：

$$|y_{n-1}(x) - y(x)| \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} |y_k(x) - y_{k-1}(x)| \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} Mq^{k-1}x = \frac{Mq^{n-1}}{1 - q}x$$

将其代入积分式的误差估计中：

$$\begin{aligned}\int_0^x |f(s,y_{n-1}(s))-f(s,y(s))|\mathrm{d}s &\leqslant \int_0^x \frac{q}{s}|y_{n-1}(s)-y(s)|\mathrm{d}s\\ &\leqslant \int_0^x \frac{q}{s}\left(\frac{Mq^{n-1}}{1-q}s\right)\mathrm{d}s\\ &=\frac{Mq^n}{1-q}x\end{aligned}$$

当 $n\to\infty$ 时，上式趋于 0。因此极限可以放入积分号内：

$$y(x)=\lim_{n\to\infty}y_n(x)=y_0+\lim_{n\to\infty}\int_0^x f(s,y_{n-1}(s))\mathrm{d}s=y_0+\int_0^x f(s,y(s))\mathrm{d}s$$

该积分方程与原初值问题等价，即 $y(x)$ 是在 $[0,a]$ 上存在的解。

第四步：证明解的唯一性

假设存在两个解 $y(x)$ 和 $z(x)$ 满足该初值问题。由于二者均在 $[0,a]$ 上连续，复合函数 $f(x,y(x))$ 和 $f(x,z(x))$ 在 $[0,a]$ 上亦连续，从而必定有界。设 $|f(x,y(x))|\leqslant K_1$ 且 $|f(x,z(x))|\leqslant K_2$。则有：

$$|y(x)-y_0|=\left|\int_0^x f(s,y(s))\mathrm{d}s\right|\leqslant K_1x,\quad |z(x)-y_0|=\left|\int_0^x f(s,z(s))\mathrm{d}s\right|\leqslant K_2x$$

令 $u(x)=|y(x)-z(x)|$，根据三角不等式：

$$u(x)\leqslant|y(x)-y_0|+|z(x)-y_0|\leqslant(K_1+K_2)x$$

记常数 $C=K_1+K_2$，即 $u(x)\leqslant Cx$。利用两解满足的积分方程作差并取绝对值：

$$u(x)=\left|\int_0^x[f(s,y(s))-f(s,z(s))]\mathrm{d}s\right|\leqslant\int_0^x\frac{q}{s}u(s)\mathrm{d}s$$

将 $u(x)\leqslant Cx$ 反复代入上式迭代：第一次代入：$u(x)\leqslant\int_0^x\frac{q}{s}(Cs)\mathrm{d}s=Cqx$ 第二次代入：$u(x)\leqslant\int_0^x\frac{q}{s}(Cqs)\mathrm{d}s=Cq^2x$ 一般地，通过数学归纳法可得：

$$u(x)\leqslant Cq^nx,\quad\forall n\in\mathbb{N}$$

由于 $0<q<1$，当 $n\to\infty$ 时，$Cq^nx\to0$。从而得到 $u(x)\leqslant0$。又因 $u(x)\geqslant0$，故必有 $u(x)\equiv0$，即 $y(x)\equiv z(x)$。存在性与唯一性得证。 □

关于第三步"验证误差"的必要性说明：

在常规的 Picard 定理证明中（满足标准 Lipschitz 条件 $|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\leqslant L|y_1-y_2|$），若 $y_n(x)$ 一致收敛于 $y(x)$，则 $f(x,y_n(x))$ 也会一致收敛于 $f(x,y(x))$。此时依据数学分析定理，可直接交换极限与积分号（即 $\lim\int=\int\lim$），无需再次计算误差。

但本题的 Lipschitz 条件存在奇点 $\frac{q}{x}$：

$$|f(x,y_{n-1}(x))-f(x,y(x))|\leqslant\frac{q}{x}|y_{n-1}(x)-y(x)|$$

当 $x\to0$ 时，$\frac{q}{x}\to+\infty$。即使 $|y_{n-1}(x)-y(x)|$ 能够一致趋于 0，奇点也会在 $x=0$ 附近将误差无限放大，导致复合函数序列 $f(x,y_{n-1}(x))$ 在 $[0,a]$ 上**不一定一致收敛**。因此，直接应用 $\lim\int=\int\lim$ 是不合法的。

误差估计的作用在于"消去奇点"：在第二步的证明中，我们不仅得到了一致收敛，还算出了一个带有自变量 x 的具体误差界：

$$|y_{n-1}(x)-y(x)|\leqslant\frac{Mq^{n-1}}{1-q}x$$

将此误差界代入第三步的积分放缩中：

$$\int_0^x\frac{q}{s}\left(\frac{Mq^{n-1}}{1-q}s\right)\mathrm{d}s=\int_0^x\frac{Mq^n}{1-q}\mathrm{d}s$$

可以看到，误差界中自带的 s 恰好与 Lipschitz 条件中的奇点 $\frac{1}{s}$ **约简抵消**了。这从积分层面上严格证明了极限过程的合法性。

4. 假设函数 $f(x,y)$ 在闭区域 $0 \leqslant x \leqslant a, -\infty < y < +\infty$ 上连续. 记 $\phi(x,\xi)$ 是微分方程 $y' = f(x,y)$ 满足初始条件 $\phi(0,\xi) = \xi$ 的解. 进一步, 假设 $\phi(x,\xi)$ 在区间 $[0,\bar{x})$ 上存在, $\bar{x} < a$. 证明下列三个结论之一成立: (1) $\lim_{x\to\bar{x}-0}\phi(x,\xi)$ 有限, 此时解 $y = \phi(x,\xi)$ 可以延伸至 $x = \bar{x}$; (2) $\lim_{x\to\bar{x}-0}\phi(x,\xi) = +\infty$; (3) $\lim_{x\to\bar{x}-0}\phi(x,\xi) = -\infty$.

Proof. 为书写简便,记该解为 $y(x) = \phi(x,\xi)$。考虑极限上下极限:令 $L = \liminf_{x\to\bar{x}^-} y(x)$,且 $U = \limsup_{x\to\bar{x}^-} y(x)$。显然 $L \leqslant U$。

第一步:证明 $L = U$,即 $\lim_{x\to\bar{x}^-} y(x)$ 必然存在:

使用反证法。假设 $L < U$,则必定可以取到两个有限的实数 α, β,使得 $L < \alpha < \beta < U$。考察有界闭矩形区域 $D = \{(x,y) \mid 0 \leqslant x \leqslant \bar{x}, \alpha \leqslant y \leqslant \beta\}$。由于 $f(x,y)$ 在给定的闭区域上连续,因此在紧集 D 上也连续,必定有界。设存在常数 $M > 0$,使得对任意 $(x,y) \in D$,有 $|f(x,y)| \leqslant M$。

由于 $\liminf y(x) < \alpha$ 且 $\limsup y(x) > \beta$,当 $x \to \bar{x}^-$ 时,解曲线 $y(x)$ 必定在直线 $y = \alpha$ 和 $y = \beta$ 之间来回穿梭无限次。这意味着在区间 $[0,\bar{x})$ 内,存在无穷多个互不相交的子区间序列 $\{(s_n,t_n)\}$,满足:$|y(t_n) - y(s_n)| = \beta - \alpha$,且对于任意 $x \in (s_n,t_n)$ 均有 $\alpha \leqslant y(x) \leqslant \beta$(即积分曲线在这些区间内完全落在区域 D 中)。

对 $y(x)$ 在区间 $[s_n,t_n]$ 上应用拉格朗日中值定理:

$$\beta - \alpha = |y(t_n) - y(s_n)| = |y'(c_n)|(t_n - s_n) = |f(c_n, y(c_n))|(t_n - s_n) \leqslant M(t_n - s_n)$$

这推出了 $t_n - s_n \geqslant \frac{\beta-\alpha}{M} > 0$。因为存在无穷多个这样不相交的区间,它们的长度之和必定趋于无穷大,这与它们全都在长度有限的区间 $[0,\bar{x}]$ 内矛盾。因此假设不成立,必有 $L = U$。即 $\lim_{x\to\bar{x}^-} y(x)$ 存在。

第二步:讨论极限的取值情况:

既然极限存在,它只有三种可能的情况:

情形 A:极限为 $+\infty$,即 $\lim_{x\to\bar{x}^-}\phi(x,\xi) = +\infty$,这对应结论 (2)。

情形 B:极限为 $-\infty$,即 $\lim_{x\to\bar{x}^-}\phi(x,\xi) = -\infty$,这对应结论 (3)。

情形 C:极限为一个有限的实数 y^*。若极限有限,由于函数 $f(x,y)$ 在包含点 $(\bar{x}, y^*)$ 的闭区域上连续(因为 $\bar{x} < a$),我们可以补充定义 $y(\bar{x}) = y^*$,使得 $y(x)$ 在 $[0,\bar{x}]$ 上连续。此时,考察导数的左极限:

$$\lim_{x\to\bar{x}^-} y'(x) = \lim_{x\to\bar{x}^-} f(x, y(x)) = f(\bar{x}, y^*)$$

由导数极限定理可知,$y(x)$ 在 $\bar{x}$ 处的左导数存在且等于 $f(\bar{x}, y(\bar{x}))$。因此解 $y = \phi(x,\xi)$ 满足微分方程,并在 $x = \bar{x}$ 处有定义,即成功延伸至 $x = \bar{x}$。这对应结论 (1)。

综上所述,这三个结论中必定有且仅有一个成立。 □

5. 假设函数 $f(x,y)$ 在闭区域 $0 \leqslant x \leqslant a, -\infty < y < +\infty$ 上连续, 并且存在定义在区间 $[0,+\infty)$ 上的连续函数 $\psi(y)$ 以及常数 $\delta_0 \geqslant 0$, 使得

$$|f(x,y)| < \psi(|y|), \qquad \int_{\delta_0}^{+\infty} \frac{1}{\psi(y)}\mathrm{d}y = +\infty.$$

证明: 微分方程 $y' = f(x,y)$ 满足初始条件 $y(0) = \xi$ 的解的存在区间为 $[0,a]$.

Proof. 采用反证法。假设该初值问题的解 $y = y(x)$ 的最大存在区间为 $[0,\bar{x})$,其中 $\bar{x} < a$。根据解的延伸定理,如果解不能向右延伸至 $x = a$,则当 $x \to \bar{x}^-$ 时,解曲线必然发生爆破,即:

$$\lim_{x\to\bar{x}^-} |y(x)| = +\infty$$

由题设条件 $|f(x,y)| < \psi(|y|)$,且绝对值 $|f(x,y)| \geqslant 0$,可知对于任意实数 y,均有 $\psi(|y|) > 0$。又因为 ψ 在 $[0,+\infty)$ 上连续,所以函数 $\frac{1}{\psi(|u|)}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上处处连续且恒正。由此,我们可以构造辅助积分函数 $G(y)$:

$$G(y) = \int_0^y \frac{1}{\psi(|u|)}\mathrm{d}u$$

由于被积函数恒正，$G(y)$ 是一个定义在 $\mathbb{R}$ 上的严格单调递增且连续可微的函数。

将方程的解 $y(x)$ 代入 $G(y)$，并对 x 求导：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}G(y(x)) = G'(y(x))y'(x) = \frac{y'(x)}{\psi(|y(x)|)}$$

两边取绝对值，代入原微分方程 $y'(x) = f(x, y(x))$，并利用题设的不等式放缩：

$$\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}G(y(x))\right| = \frac{|f(x, y(x))|}{\psi(|y(x)|)} < 1$$

对上式在区间 $[0, x]$（其中 $x < \bar{x}$）上进行定积分，利用绝对值积分不等式：

$$|G(y(x)) - G(y(0))| = \left|\int_0^x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}G(y(t))\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^x \left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}G(y(t))\right|\mathrm{d}t < \int_0^x 1\mathrm{d}t = x \leqslant \bar{x} < a$$

代入初始条件 $y(0) = \xi$，去掉绝对值符号，可得到 $G(y(x))$ 的严格上下界：

$$G(\xi) - a < G(y(x)) < G(\xi) + a$$

这表明，在整个存在区间 $[0, \bar{x})$ 上，$G(y(x))$ 是有界的。

另一方面，已知 $\lim_{x\to\bar{x}^-} |y(x)| = +\infty$，且 $y(x)$ 是连续函数，因此它必然严格趋于 $+\infty$ 或 $-\infty$。

情形 1：若 $\lim_{x\to\bar{x}^-} y(x) = +\infty$。对 $G(y(x))$ 取极限：

$$\lim_{x\to\bar{x}^-} G(y(x)) = \lim_{y\to+\infty} \int_0^y \frac{1}{\psi(u)}\mathrm{d}u = \int_0^{\delta_0} \frac{1}{\psi(u)}\mathrm{d}u + \int_{\delta_0}^{+\infty} \frac{1}{\psi(u)}\mathrm{d}u$$

第一项是连续函数在闭区间上的积分，结果为有限常数；根据题设条件，第二项反常积分为 $+\infty$。从而推得 $\lim_{x\to\bar{x}^-} G(y(x)) = +\infty$，这与前面证明的上限 $G(y(x)) < G(\xi) + a$ 产生矛盾。

情形 2：若 $\lim_{x\to\bar{x}^-} y(x) = -\infty$。对 $G(y(x))$ 取极限，并作变量代换 $s = -u$：

$$\lim_{x\to\bar{x}^-} G(y(x)) = \lim_{y\to-\infty} \int_0^y \frac{1}{\psi(|u|)}\mathrm{d}u = \lim_{y\to-\infty} \left(-\int_0^{|y|} \frac{1}{\psi(s)}\mathrm{d}s\right) = -\infty$$

这同样与前面证明的下限 $G(y(x)) > G(\xi) - a$ 产生矛盾。

综上所述，关于最大存在区间上限 $\bar{x} < a$ 的假设不成立。解曲线不可能在小于 a 的有限区间内发生爆破，因此该初值问题的解必定可以在整个闭区间 $[0, a]$ 上存在。原命题得证。 □

6. 假设函数 $f(x, y)$ 在有界闭区域 G 上对 y 满足局部 Lipschitz 条件. 证明: $f(x, y)$ 在 G 上对 y 满足 Lipschitz 条件, 即存在常数 $L > 0$, 使得对于任意的 $(x, y_1), (x, y_2) \in G$, 有

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leqslant L|y_1 - y_2|.$$

Proof. 采用反证法。假设 $f(x, y)$ 在 G 上不满足全局 Lipschitz 条件。则对于任意的正整数 n，均存在 $(x_n, y_n) \in G$ 和 $(x_n, z_n) \in G$，使得

$$|f(x_n, y_n) - f(x_n, z_n)| > n|y_n - z_n|$$

由于 G 是有界闭区域（紧集），序列 $\{(x_n, y_n)\}$ 和 $\{(x_n, z_n)\}$ 均存在收敛子序列。不失一般性，假设序列本身分别收敛于 $(x^*, y^*) \in G$ 和 $(\tilde{x}^*, z^*) \in G$。显然两者的横坐标同为 x_n，故 $x^* = \tilde{x}^*$。

若 $y^* \neq z^*$，当 $n \to \infty$ 时，有 $|y_n - z_n| \to |y^* - z^*| > 0$。那么不等式左端 $|f(x_n, y_n) - f(x_n, z_n)| \leqslant 2M$ 是有界的，而不等式右端 $n|y_n - z_n| \to +\infty$，产生矛盾。因此，必须有 $y^* = z^*$。这意味着序列 $\{(x_n, y_n)\}$ 和 $\{(x_n, z_n)\}$ 收敛于同一个点 (x^*, y^*)。

根据题设，$f(x, y)$ 在 G 上满足局部 Lipschitz 条件。因此，在点 (x^*, y^*) 处，存在一个邻域 U 以及常数 $L^* > 0$，使得对于任意的 $(x, y_1), (x, y_2) \in U \cap G$，都有：

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leqslant L^*|y_1 - y_2|$$

由于 $\{(x_n, y_n)\}$ 和 $\{(x_n, z_n)\}$ 都收敛于 (x^*, y^*)，当 n 充分大时，这两点必然都落在邻域 $U \cap G$ 内。从而有：

$$|f(x_n, y_n) - f(x_n, z_n)| \leqslant L^*|y_n - z_n|$$

结合反证法假设，得到：

$$n|y_n - z_n| < |f(x_n, y_n) - f(x_n, z_n)| \leqslant L^*|y_n - z_n|$$

因为严格不等式成立，必有 $|y_n - z_n| \neq 0$。两边同除以 $|y_n - z_n|$ 得到 $n < L^*$。当 $n \to \infty$ 时，这显然与 L^* 是一个固定常数矛盾。

因此，假设不成立。$f(x, y)$ 在有界闭区域 G 上对 y 必定满足全局 Lipschitz 条件。原命题得证。 □

3.5 比较定理

1. 考虑初值问题

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

设函数 $f(x, y)$ 在矩形闭区域 $D = \{(x, y) \mid |x - x_0| \leqslant a, |y - y_0| \leqslant b\}$ 上连续, 令

$$h = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}, \quad M = \max_{(x,y)\in D} |f(x, y)|.$$

证明: 该初值问题的最大解 $y = Z(x)$ 与最小解 $y = W(x)$ 之间充满了其他解, 即对于任一满足

$$|x_1 - x_0| \leqslant h, \quad W(x_1) \leqslant y_1 \leqslant Z(x_1)$$

的点 (x_1, y_1), 该初值问题在 $|x - x_0| \leqslant h$ 上至少有一个解 $y = \phi(x)$, 满足 $\phi(x_1) = y_1$.

Proof. 不失一般性，假设 $x_1 > x_0$（对于 $x_1 < x_0$ 的情况可同理证明）。若 $y_1 = Z(x_1)$ 或 $y_1 = W(x_1)$，结论显然成立，故假设 $W(x_1) < y_1 < Z(x_1)$。

以 (x_1, y_1) 为初值，考虑向左侧延伸的逆向初值问题：

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_1) = y_1. \end{cases}$$

由于 $f(x, y)$ 在 D 上连续，由 Peano 存在定理，此逆向初值问题存在解 $y = \psi(x)$。根据解的延展定理以及 h 的定义，该解至少可向左延展至 x_0 而不离开区域 D（解的延展性定理说的是它要么能抵达 x_0，要么会撞到边界而被迫停止，但它从 x 到 x_0 的纵轴跨度不会超过 $hM \leqslant b$）。

在区间 $[x_0, x_1]$ 上考察解曲线 $\psi(x)$。由于 $W(x_0) = Z(x_0) = y_0$，若 $\psi(x)$ 在整个 $[x_0, x_1]$ 上都不与 $Z(x)$ 或 $W(x)$ 相交，则由连续性必有 $\psi(x_0) = y_0$。此时 $\psi(x)$ 自身就是过 (x_0, y_0) 且过 (x_1, y_1) 的解。

若 $\psi(x)$ 在 (x_0, x_1) 内与 $Z(x)$ 或 $W(x)$ 相交，不妨设自右向左 $\psi(x)$ 首次与 $Z(x)$ 相交于点 x^*，即 $\psi(x^*) = Z(x^*)$，且在 $(x^*, x_1]$ 上有 $W(x) < \psi(x) < Z(x)$。构造如下拼接函数：

$$\phi(x) = \begin{cases} Z(x), & x_0 \leqslant x \leqslant x^*, \\ \psi(x), & x^* < x \leqslant x_1. \end{cases}$$

显然 $\phi(x)$ 在 x^* 处连续。又因 $\phi(x)$ 在 x^* 处的左右导数分别为 $Z'(x^*) = f(x^*, Z(x^*))$ 与 $\psi'(x^*) = f(x^*, \psi(x^*))$，且二者在交点处相等，故 $\phi(x)$ 在 x^* 处处可导。因此，$\phi(x)$ 是在区间 $[x_0, x_1]$ 上满足原初值问题 $y(x_0) = y_0$ 的解，且满足 $\phi(x_1) = y_1$。

最后，利用解的延展定理，将 $\phi(x)$ 分别由 x_1 向右延展至 $x_0 + h$、由 x_0 向左延展至 $x_0 - h$，即可得到在整个区间 $|x - x_0| \leqslant h$ 上过点 (x_1, y_1) 的解。原命题得证。 □

2. 证明引理 3.7.

引理 3.7 初值问题

$$\begin{cases} y' = -A(x)|y| - B(x) - 1, \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

的解 $y = \psi(x)$ 在 (a,b) 上存在且唯一，其中 $A(x), B(x)$ 在 (a,b) 上是非负的连续函数.

Proof. 记方程右端函数为 $f(x,y) = -A(x)|y| - B(x) - 1$。分两步证明：先证局部存在唯一性，再证解可延展至整个 (a,b) 区间。

第一步：证明局部存在唯一性。因为 $A(x), B(x)$ 在区间 (a,b) 上连续，且绝对值函数 $|y|$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续，所以复合函数 $f(x,y)$ 在条形区域 $G = \{(x,y) \mid a < x < b, -\infty < y < +\infty\}$ 上连续。对于区域 G 内的任意两点 (x,y_1) 和 (x,y_2)，考察 $f(x,y)$ 关于 y 的 Lipschitz 条件。由于 $A(x)$ 非负：

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| = |-A(x)|y_1| - (-A(x)|y_2|)| = A(x)\big||y_1| - |y_2|\big| \leqslant A(x)|y_1 - y_2|$$

对于 (a,b) 内包含 x_0 的任意闭子区间 $[\alpha,\beta]$，由于 $A(x)$ 连续，必存在常数 $L = \max_{x\in[\alpha,\beta]} A(x) \geqslant 0$，使得 $A(x) \leqslant L$。因此 $f(x,y)$ 在 G 内满足局部 Lipschitz 条件。由 Picard 存在唯一性定理可知，该初值问题在 x_0 附近存在唯一的解 $y = \psi(x)$。

第二步：证明解可以全局延展至 (a,b)。假设该唯一解向右的最大存在区间为 $[x_0,\omega_+)$，其中 $\omega_+ \leqslant b$。若 $\omega_+ < b$，根据解的延展定理，当 $x \to \omega_+^-$ 时，解曲线必然爆破，即 $\lim_{x\to\omega_+^-} |\psi(x)| = +\infty$。将原方程在 $[x_0,x]$ 上积分（其中 $x_0 \leqslant x < \omega_+$），并两边取绝对值：

$$\begin{aligned} |\psi(x)| &= \left| y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s,\psi(s))\mathrm{d}s \right| \\ &\leqslant |y_0| + \int_{x_0}^{x} |f(s,\psi(s))|\mathrm{d}s \\ &= |y_0| + \int_{x_0}^{x} \big| -A(s)|\psi(s)| - B(s) - 1 \big|\mathrm{d}s \\ &\leqslant |y_0| + \int_{x_0}^{x} \big(A(s)|\psi(s)| + B(s) + 1 \big)\mathrm{d}s \end{aligned}$$

令 $C(x) = |y_0| + \int_{x_0}^{x}(B(s)+1)\mathrm{d}s$。因为 $B(s)$ 在 (a,b) 上连续，所以在紧区间 $[x_0,\omega_+]$ 上 $B(s)+1$ 是连续且有界的，故存在常数 $M_1 > 0$ 使得对所有 $x \in [x_0,\omega_+)$，都有 $C(x) \leqslant M_1$。于是积分不等式化为：

$$|\psi(x)| \leqslant M_1 + \int_{x_0}^{x} A(s)|\psi(s)|\mathrm{d}s$$

应用 Gronwall 不等式（积分形式），可得：

$$|\psi(x)| \leqslant M_1 \exp\left(\int_{x_0}^{x} A(s)\mathrm{d}s \right)$$

同理，由于 $A(s)$ 在闭区间 $[x_0,\omega_+]$ 上连续且有界，积分 $\int_{x_0}^{x} A(s)\mathrm{d}s$ 存在上界 M_2。因此，对于所有的 $x \in [x_0,\omega_+)$，均有：

$$|\psi(x)| \leqslant M_1 \mathrm{e}^{M_2}$$

这表明 $|\psi(x)|$ 在 $[x_0,\omega_+)$ 上是一致有界的。这与爆破条件 $\lim_{x\to\omega_+^-} |\psi(x)| = +\infty$ 产生矛盾。故假设不成立，必定有 $\omega_+ = b$。

同理可证解向左的延展。假设向左的最大存在区间为 $(\omega_-, x_0]$ 且 $\omega_- > a$，通过在 $[x,x_0]$ 上积分并利用 Gronwall 不等式，同样可证 $|\psi(x)|$ 有界，从而得出矛盾，故必定有 $\omega_- = a$。综上所述，该初值问题的解 $y = \psi(x)$ 在整个区间 (a,b) 上存在且唯一。 □

3.6 奇解

1. 设连续函数 $E(y)$ 满足条件

$$E(0)=0,\quad E(y)\neq 0,\quad 0<y\leqslant 1.$$

证明: $y\equiv 0$ 是微分方程

$$y'=E(y)$$

的奇解的充要条件是 $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}y}{E(y)}$ 收敛.

Proof. 由于 $E(y)$ 在 $(0,1]$ 上连续且不为零，不失一般性，假设在此区间内 $E(y)>0$。因为 $E(0)=0$，$y\equiv 0$ 显然是该微分方程的一个解。根据奇解的定义，$y\equiv 0$ 是奇解等价于在 $y=0$ 上的每一点解都不唯一。即存在另一条不恒为零的解曲线 $y(x)$，在某个有限的横坐标 x_0 处满足 $y(x_0)=0$ 且在此处与 $y\equiv 0$ 相切（由于 $y'(x_0)=E(0)=0$ 自然满足相切）。

任取一解曲线，设其经过点 (x_1,y_1)，其中 $0<y_1\leqslant 1$。分离变量并积分：

$$\frac{\mathrm{d}y}{E(y)}=\mathrm{d}x \implies \int_{y_1}^{y}\frac{\mathrm{d}s}{E(s)}=x-x_1$$

记 $F(y)=\int_{y_1}^{y}\frac{\mathrm{d}s}{E(s)}$。

充分性（若积分收敛，证明 $y\equiv 0$ 是奇解）：假设广义积分 $\int_0^1\frac{\mathrm{d}y}{E(y)}$ 收敛。当 $y\to 0^+$ 时，$\lim_{y\to 0^+}F(y)=\int_{y_1}^{0}\frac{\mathrm{d}s}{E(s)}$ 是一个有限的实数。这意味着当解曲线向 $y=0$ 逼近时，横坐标 x 趋于一个有限值 $x_0=x_1+\int_{y_1}^{0}\frac{\mathrm{d}s}{E(s)}$。因此，该非零解曲线在有限点 $(x_0,0)$ 处到达了 $y=0$。这说明在 $(x_0,0)$ 处解不唯一，故 $y\equiv 0$ 是奇解。

必要性（若 $y\equiv 0$ 是奇解，证明积分收敛）：假设 $y\equiv 0$ 是奇解。若广义积分 $\int_0^1\frac{\mathrm{d}y}{E(y)}$ 发散，由于在 $(0,1]$ 上 $E(y)>0$，必定有 $\lim_{y\to 0^+}\int_{y_1}^{y}\frac{\mathrm{d}s}{E(s)}=-\infty$。这意味着，对于任意一条经过 $y>0$ 区域的解曲线，当 $y\to 0^+$ 时，其横坐标 $x=x_1+F(y)\to-\infty$。这表明解曲线只能在负无穷远处趋近于 $y=0$，永远无法在有限的 x_0 处与 $y=0$ 贴合。从而在 $y=0$ 处的解是唯一的，这与 $y\equiv 0$ 是奇解矛盾。故该广义积分必须收敛。 □

2. 求函数 f, 使 $y=\sin x$ 是微分方程 $y=xy'+f(y')$ 的奇解.

Proof. 已知微分方程 $y=xy'+f(y')$ 为克莱罗（Clairaut）方程。令 $p=y'$，对原方程两边关于 x 求导得：

$$p=p+xp'+f'(p)p' \implies p'(x+f'(p))=0$$

奇解对应于 $p'\neq 0$ 的情况，此时有包络线的参数方程：

$$\begin{cases} x=-f'(p),\\ y=-pf'(p)+f(p). \end{cases}$$

已知奇解为 $y=\sin x$，对其求导得 $p=y'=\cos x$。将 $p=\cos x$ 代入第一式 $x=-f'(p)$ 中（限定 $x\in[0,\pi]$），得到：

$$x=\arccos p \implies -f'(p)=\arccos p \implies f'(p)=-\arccos p$$

对 $f'(p)$ 进行不定积分，利用分部积分法求出 $f(p)$ 的表达式：

$$\begin{aligned} f(p)&=\int -\arccos p\,\mathrm{d}p\\ &=-p\arccos p+\int p\cdot\frac{-1}{\sqrt{1-p^2}}\,\mathrm{d}p\\ &=-p\arccos p+\sqrt{1-p^2}+C \end{aligned}$$

将 $y=\sin x, x=\arccos p$ 及求得的 $f(p)$ 代入原方程 $y=xp+f(p)$ 以确定常数 C：

$$\sin x=\arccos(\cos x)\cdot\cos x+\left(-\cos x\arccos(\cos x)+\sqrt{1-\cos^2 x}+C\right)$$

由于 $\arccos(\cos x) = x$ 且 $\sqrt{1-\cos^2 x} = \sin x$（在 $x \in [0, \pi]$ 内）：

$$\sin x = x\cos x - x\cos x + \sin x + C \implies C = 0$$

因此 $f(p) = \sqrt{1-p^2} - p\arccos p$。将变量 p 替换为一般自变量符号 x，可得函数 f 的表达式：

$$f(x) = \sqrt{1-x^2} - x\arccos x$$

□

3. 给定平面上一条连续可微曲线 $\gamma: y = f(x)$, 试找出一个以 $y = f(x)$ 为奇解的微分方程.

Proof. 设所求的微分方程一般形式为 $H(x, y, y') = 0$。进行平移变换，引入新的未知函数 $u(x) = y(x) - f(x)$。如果 $y = f(x)$ 是原方程的奇解，那么 $u \equiv 0$ 必定是变换后的新方程 $\tilde{H}(x, u, u') = H(x, u + f(x), u' + f'(x)) = 0$ 的奇解。因此，寻找以 $y = f(x)$ 为奇解的方程，等价于寻找一个以 $u \equiv 0$ 为奇解的简单方程。

考虑经典的微分方程 $u' = u^{\frac{1}{3}}$。该方程显然有特解 $u \equiv 0$。用分离变量法求解 $u \neq 0$ 时的解：

$$u^{-\frac{1}{3}}\mathrm{d}u = \mathrm{d}x \implies \frac{3}{2}u^{\frac{2}{3}} = x - C \implies u = \pm\left(\frac{2}{3}(x-C)\right)^{\frac{3}{2}}$$

由于存在无数条这样的曲线可以在 $x = C$ 处与直线 $u = 0$ 完美相切拼接，这意味着在 $u = 0$ 上的任意一点解都不唯一，故 $u \equiv 0$ 是方程 $u' = u^{\frac{1}{3}}$ 的奇解。

将其写为隐式方程形式：

$$u' - u^{\frac{1}{3}} = 0$$

将 $u = y - f(x)$ 以及 $u' = y' - f'(x)$ 逆代换回该方程，即可得到关于 y 的微分方程：

$$y' - f'(x) - (y - f(x))^{\frac{1}{3}} = 0$$

该方程即为所求，它显然以 $y = f(x)$ 为奇解。 □

3.7 包络

3.7 小节内容的解答参考了北京大学 21 级学姐（id“妙姐”）于 2024 年 6 月公开发布的解答过程，本节答案的版权归妙姐所有。

1. 求微分方程

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^4 - \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^3 - y^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y^2 = 0$$

的通积分及积分曲线族的包络.

Proof. 由 $y'^4 - y'^3 - y^2y' + y^2 = 0$ 得 $(y'-1)(y'^3 - y^2) = 0$. 若 $y' \equiv 1$，则解得 $y = x + c$，其中 c 为任意常数。若 $y'^3 = y^2$，则解得 $y \equiv 0$ 和 $y = \left[\frac{1}{3}(x+c)\right]^3$，其中 c 为任意常数。

对于曲线族 $y = x+c$，显然不存在包络，因为假设存在，则包络上任一点切线斜率均为 1，从而该曲线是曲线族中的一条曲线，这和包络的定义矛盾。对于曲线族 $V(x, y, c) := y - \left[\frac{1}{3}(x+c)\right]^3$，有 $V_c'(x, y, c) = -\left[\frac{1}{3}(x+c)\right]^2$. 于是由 c-判别式可解出 $y \equiv 0$. 由于 $(x, y) = (-c, 0)$ 点处 $(x_c', y_c') = (-1, 0) \neq (0, 0)$, $(V_x'(-c, 0, c), V_y'(-c, 0, c)) = (0, 1) \neq (0, 0)$。故 $y = 0$ 是积分曲线族的包络。 □

2. 已知微分方程的通解如下 (c 为任意常数)，求出微分方程的奇解:

(1) $y = cx^2 - c^2$;

(2) $cy = (x-c)^2$;

(3) $y = c(x-c)^2$;

(4) $xy = cy - c^2$.

Proof. (1) 设 $V(x,y,c)=y-cx^2+c^2$, 则 $V_x'(x,y,c)=-2cx$, $V_y'(x,y,c)=1\neq 0$, $V_c'(x,y,c)=-x^2+2c$. 由 $\begin{cases}V(x,y,c)=0,\\ V_c'(x,y,c)=0\end{cases}$ 解得 $y=\frac{1}{4}x^4$. 由于 $V_y'\neq 0$，故只需考虑 c-判别式解得曲线的切向量。曲线族与 $y=\frac{1}{4}x^4$ 交于点 $(\pm\sqrt{2c},c^2)$，从而 $(x_c',y_c')=\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2c}},2c\right)$. 当 $c=0$ 时曲线族中的曲线为 $y=0$，它仍然与 $y=\frac{1}{4}x^4$ 在 $(0,0)$ 处相切，因此 $y=\frac{1}{4}x^4$ 是曲线族的包络，它也是方程的奇解.

(2) 设 $V(x,y,c)=cy-(x-c)^2$, 则 $V_x'(x,y,c)=-2(x-c)$, $V_y'(x,y,c)=c$, $V_c'(x,y,c)=y+2(x-c)$. 由 $\begin{cases}V(x,y,c)=0,\\ V_c'(x,y,c)=0\end{cases}$ 解得 $y=0$ 和 $4x+y=0$. 曲线族与 $y=0$ 交于点 $(c,0)$，从而 $(x_c',y_c')=(1,0)\neq(0,0)$，$(V_x'(c,0,c),V_y'(c,0,c))=(0,c)$. 当 $c=0$ 时曲线族中的曲线为 $x=0$，它不与 $y=0$ 在 $(0,0)$ 点相切，因此 $y=0$ $(x\neq 0)$ 是曲线族的包络. 曲线族与 $4x+y=0$ 交于点 $(-c,4c)$，从而 $(x_c',y_c')=(-1,4)\neq(0,0)$，$(V_x'(-c,4c,c),V_y'(-c,4c,c))=(4c,c)$. 当 $c=0$ 时 $x=0$ 也不与 $4x+y=0$ 在 $(0,0)$ 相切，因此 $4x+y=0$ $(x\neq 0)$ 是曲线族的包络. 因此奇解为 $y\equiv 0$ $(x\neq 0)$ 和 $4x+y=0$ $(x\neq 0)$.

(3) 设 $V(x,y,c)=y-c(x-c)^2$, 则 $V_x'(x,y,c)=-2c(x-c)$, $V_y'(x,y,c)=1\neq 0$, $V_c'(x,y,c)=-(x-c)(x-3c)$. 由 $\begin{cases}V(x,y,c)=0,\\ V_c'(x,y,c)=0\end{cases}$ 解得 $y=0$ 和 $y=\frac{4}{27}x^3$. 由于 $V_y'\neq 0$，故只需考虑 c-判别式解得曲线的切向量。曲线族与 $y=0$ 交于点 $(c,0)$，故 $(x_c',y_c')=(1,0)\neq(0,0)$，但由于 $c=0$ 时曲线族中的曲线也是 $y=0$，因此 $y=0$ 不是曲线族的包络，但 $y=0$ $(x\neq 0)$ 可以作为奇解. 曲线族与 $y=\frac{4}{27}x^3$ 交于 $(3c,4c^3)$，故 $(x_c',y_c')=(3,12c^2)\neq(0,0)$，因此 $y=\frac{4}{27}x^3$ 是曲线族的包络. 由于 $y=\frac{4}{27}x^3$ 也过 $(0,0)$，故过 $(0,0)$ 点也至少存在两个解，因此奇解为 $y\equiv 0$ 和 $y=\frac{4}{27}x^3$.

(4) 设 $V(x,y,c)=xy-cy+c^2$. 则 $V_x'(x,y,c)=y$, $V_y'(x,y,c)=x-c$, $V_c'(x,y,c)=-y+2c$. 由 $\begin{cases}V(x,y,c)=0,\\ V_c'(x,y,c)=0\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}xc=\frac{1}{2}c^2,\\ y=2c,\end{cases}$ 即直线 $y=0$ 和 $y=4x$. 由于 $c=0$ 时曲线族中的曲线为 $y=0$ 和 $x=0$，故 $y=0$ 不是曲线族的包络. 曲线族与 $y=4x$ 交于 $(\frac{1}{2}c,2c)$，从而 $(x_c',y_c')=(\frac{1}{2},2)\neq(0,0)$，$(V_x'(\frac{1}{2}c,2c,c),V_y'(\frac{1}{2}c,2c,c))=(2c,-\frac{1}{2}c)$. $c=0$ 时曲线族中的曲线 $y=0$ 和 $x=0$ 不与 $y=4x$ 在 $(0,0)$ 相切，故 $y=4x$ $(x\neq 0)$ 是曲线族的包络. 因此奇解为 $y=4x$ $(x\neq 0)$. □

3. 求一条曲线，使其任一点处的切线与两条坐标轴所围成三角形的面积为 a^2.

Proof. 由习题 2.5 题 3 可知所求曲线为 $y=cx\pm\sqrt{2}a\sqrt{|c|}$ (c 为任意非零常数) 和 $y=\pm\frac{a^2}{2x}$. 但学了本节内容，本题还有另一种更好的方法：对于满足条件的曲线，它的切线族也满足题目条件；对于满足条件的直线族，它的包络也是满足条件的曲线，因此只需要求出满足条件的直线族，再求出直线族的包络即可.

设直线 $y=cx+d$ 满足与坐标轴所围三角形的面积为 a^2，则 $\frac{1}{2}\left|-\frac{d}{c}\cdot d\right|=a^2$，即 $d=\pm\sqrt{2}a\sqrt{|c|}$. 于是直线族 $y=cx\pm\sqrt{2}a\sqrt{|c|}$ (c 为任意非零常数) 满足条件.

设 $V(x,y,c)=cx-y+\sqrt{2}a\sqrt{|c|}$ $(c\neq 0)$，由 $\begin{cases}V(x,y,c)=0\\ V_c'(x,y,c)=0\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=-\frac{\sqrt{2}a\,\mathrm{sgn}(c)}{2\sqrt{|c|}},\\ y=\frac{\sqrt{2}a\sqrt{|c|}}{2},\end{cases}$ 即 $xy=-\frac{a^2}{2}\mathrm{sgn}(c)=-\frac{a^2}{2}\mathrm{sgn}(x)$ $(x\neq 0)$. 由于 $(x_c',y_c')=\left(\frac{\sqrt{2}a}{4|c|^{\frac{3}{2}}},\frac{\sqrt{2}a\,\mathrm{sgn}(c)}{4\sqrt{|c|}}\right)\neq(0,0)$，且 $(V_x'(x_c,y_c,c),V_y'(x_c,y_c,c))=(c,-1)\neq(0,0)$，故 $y=-\frac{a^2}{2x}\mathrm{sgn}(x)$ 是直线族的包络，为满足题目条件的曲线.

同理对直线族 $y=cx-\sqrt{2}a\sqrt{|c|}$ $(c\neq 0)$ 讨论可得 $y=\frac{a^2}{2|x|}$ 是满足条件的曲线.

综上，所求曲线为 $y=cx\pm\sqrt{2}a\sqrt{|c|}$ (c 为任意非零常数) 和 $y=\pm\frac{a^2}{2x}$. □

4 解对初值和参数的依赖性

4.1 n 维线性空间中的微分方程

4.2 解对初值和参数的连续依赖性

1. 举例说明：当微分方程初值问题的解不唯一时，它的积分曲线族在局部范围内不能视作平行直线族.

Proof. 考虑初值问题：

$$\begin{cases} y' = 3y^{\frac{2}{3}}, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

该问题在点 $(0,0)$ 处不满足 Lipschitz 条件，存在至少两个不同的解：

$$y_1(x) \equiv 0, \quad y_2(x) = x^3.$$

这两条积分曲线在点 $(0,0)$ 处相交。

平行直线族（例如 $y = c$，其中 c 为常数）中的任意两条不同的直线都是互不相交的。如果在 $(0,0)$ 的局部范围内，积分曲线族可以视作平行直线族，意味着存在一个局部的拓扑同胚映射将积分曲线族变为平行直线族。由于拓扑同胚映射是双射，必须保持集合的相交性质不变（即相交的曲线映射后仍相交，不交的映射后仍不交）。积分曲线在交点处相交，而平行直线族互不相交，两者无法建立同胚映射。因此，当解不唯一时，积分曲线族在局部范围内不能视作平行直线族。 □

2. 举例说明：当微分方程初值问题的解不唯一时，过某个初值点的最大解对于初值不是连续的.

Proof. 考虑微分方程初值问题：

$$y' = 3y^{\frac{2}{3}}, \quad y(0) = \eta$$

该方程在 $y = 0$ 处不满足 Lipschitz 条件，其解不唯一。记该初值问题的最大解为 $Z_\eta(x)$。

当 $\eta = 0$ 时，满足 $y(0) = 0$ 的最大解为：

$$Z_0(x) = \begin{cases} x^3, & x \geqslant 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

当 $\eta < 0$ 时，由分离变量法可得积分曲线为 $y = (x - C)^3$，代入初值得 $C = -\eta^{1/3}$。由于是求最大解，积分曲线在 $x = -\eta^{1/3} > 0$ 处到达 $y = 0$ 后，应立刻沿正向分支继续向上延伸。故对所有的 $x \in \mathbb{R}$，其最大解的表达式统一为：

$$Z_\eta(x) = (x + \eta^{\frac{1}{3}})^3$$

现取定 $x = -1$ 处，考察最大解序列在极限过程中的表现。当 $\eta = 0$ 时，由最大解的定义有：

$$Z_0(-1) = 0$$

当 $\eta < 0$ 且令 $\eta \to 0^-$ 时，求最大解在 $x = -1$ 处的极限：

$$\lim_{\eta \to 0^-} Z_\eta(-1) = \lim_{\eta \to 0^-} (-1 + \eta^{\frac{1}{3}})^3 = -1$$

显然 $\lim_{\eta \to 0^-} Z_\eta(-1) \neq Z_0(-1)$。这说明最大解序列的极限函数并不等于极限初值对应的最大解。因此，当解不唯一时，过某个初值点的最大解对于初值是不连续的。 □

3. 考虑初值问题

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

其中 $f(x, y)$ 是连续函数. 设 $y = \phi(x; x_0, y_0)$ 是该初值问题的最大解. 证明: $\phi(x; x_0, y_0)$ 对于 y_0 是右连续的, 即

$$\lim_{y_1 \to y_0 + 0} \phi(x; x_0, y_1) = \phi(x; x_0, y_0)$$

在 $|x - x_0| \leqslant \alpha$ 上成立, 其中 $\alpha > 0$ 是常数.

Proof. 设 $y_1 > y_0$. 由解的比较定理可知, 对于 $y_1 > y_0$, 它们对应的最大解在共同的存在区间内满足不等式:

$$\phi(x; x_0, y_1) \geqslant \phi(x; x_0, y_0)$$

取一个单调递减且趋于 y_0 的序列 $\{y_1^{(n)}\}$, 对应的最大解序列 $\phi_n(x) = \phi(x; x_0, y_1^{(n)})$ 随 n 的增加而单调递减, 且以 $\phi(x; x_0, y_0)$ 为下界. 因此, 对于闭区间 $|x - x_0| \leqslant \alpha$ 上的每一点 x, 极限必定存在, 记为:

$$\psi(x) = \lim_{n \to \infty} \phi_n(x) = \lim_{y_1 \to y_0 + 0} \phi(x; x_0, y_1)$$

由于 $f(x, y)$ 连续, 且最大解序列一致有界并等度连续 (等度连续是因为导函数 f 的有界性), 根据 Arzela-Ascoli 定理及极限过程求导与积分的交换性质, 极限函数 $\psi(x)$ 必定也是微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x, y)$ 的解, 且满足初始条件:

$$\psi(x_0) = \lim_{y_1 \to y_0 + 0} y_1 = y_0$$

对先前的不等式 $\phi(x; x_0, y_1) \geqslant \phi(x; x_0, y_0)$ 两端取极限, 得到:

$$\psi(x) \geqslant \phi(x; x_0, y_0)$$

另一方面, 已知 $\phi(x; x_0, y_0)$ 是过点 (x_0, y_0) 的最大解. 根据最大解的定义, 经过该点的任何解都不能超过它, 即必须有:

$$\psi(x) \leqslant \phi(x; x_0, y_0)$$

综合以上两式, 必然有:

$$\psi(x) \equiv \phi(x; x_0, y_0)$$

这证明了 $\lim_{y_1 \to y_0 + 0} \phi(x; x_0, y_1) = \phi(x; x_0, y_0)$. 此外, 由于连续函数序列 $\phi_n(x)$ 单调递减且收敛于连续函数 $\phi(x; x_0, y_0)$, 根据 Dini 定理, 此收敛在紧区间 $|x - x_0| \leqslant \alpha$ 上是一致的. 命题得证. □

4.3 解对初值和参数的连续可微性

1、设函数 $y = y(x, \eta)$ 是初值问题

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \sin xy, \\ y(0) = \eta \end{cases}$$

的解. 证明:

$$\frac{\partial y}{\partial \eta}(x, \eta) > 0.$$

Proof.

$$y(x, \eta) = \eta + \int_0^x \sin(sy(s, \eta))\mathrm{d}s$$

等式两边对初值 η 求偏导数，得：

$$\frac{\partial y}{\partial \eta}=1+\int_0^x s\cos(sy(s,\eta))\frac{\partial y}{\partial \eta}\mathrm{d}s$$

令 $u(x)=\frac{\partial y}{\partial \eta}(x,\eta)$，上式化为：

$$u(x)=1+\int_0^x s\cos(sy(s,\eta))u(s)\mathrm{d}s$$

对上式两端关于 x 求导，可知函数 $u(x)$ 满足如下线性微分方程初值问题：

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=x\cos(xy(x,\eta))u\\ u(0)=1\end{cases}$$

求解该方程，得到：

$$u(x)=\exp\left(\int_0^x s\cos(sy(s,\eta))\mathrm{d}s\right)$$

由于指数函数恒大于零，因此在解存在的区间内必有：

$$\frac{\partial y}{\partial \eta}(x,\eta)>0.$$

□

2. 设函数 $\boldsymbol{y}(x;x_0,\boldsymbol{y}_0)$ 是初值问题

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}x}=\boldsymbol{f}(x,\boldsymbol{y}),\\ \boldsymbol{y}(x_0)=\boldsymbol{y}_0\end{cases}$$

的解, 其中函数 $\boldsymbol{f}(x,\boldsymbol{y})$ 关于 $(x,\boldsymbol{y})$ 是连续可微的. 证明:

$$\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial x_0}(x;x_0,\boldsymbol{y}_0)+\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \boldsymbol{y}_0}(x;x_0,\boldsymbol{y}_0)\boldsymbol{f}(x_0,\boldsymbol{y}_0)\equiv\mathbf{0}.$$

Proof. 将初值问题的解写为积分方程形式:

$$\boldsymbol{y}(x;x_0,\boldsymbol{y}_0)=\boldsymbol{y}_0+\int_{x_0}^x \boldsymbol{f}(s,\boldsymbol{y}(s;x_0,\boldsymbol{y}_0))\mathrm{d}s$$

等式两端分别对 x_0 和 $\boldsymbol{y}_0$ 求偏导数:

$$\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial x_0}=-\boldsymbol{f}(x_0,\boldsymbol{y}(x_0;x_0,\boldsymbol{y}_0))+\int_{x_0}^x\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{y}}\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial x_0}\mathrm{d}s=-\boldsymbol{f}(x_0,\boldsymbol{y}_0)+\int_{x_0}^x\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{y}}\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial x_0}\mathrm{d}s$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \boldsymbol{y}_0}=\boldsymbol{I}+\int_{x_0}^x\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{y}}\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \boldsymbol{y}_0}\mathrm{d}s$$

其中 $\boldsymbol{I}$ 为单位矩阵.

两端对 x 求导, 得到 $\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial x_0}$ 和 $\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \boldsymbol{y}_0}$ 满足的线性变分方程初值问题:

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial x_0}\right)=\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{y}}\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial x_0}\\ \left.\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial x_0}\right|_{x=x_0}=-\boldsymbol{f}(x_0,\boldsymbol{y}_0)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \boldsymbol{y}_0}\right)=\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{y}}\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \boldsymbol{y}_0}\\ \left.\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \boldsymbol{y}_0}\right|_{x=x_0}=\boldsymbol{I}\end{cases}$$

构造函数 $\boldsymbol{W}(x)=\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial x_0}+\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \boldsymbol{y}_0}\boldsymbol{f}(x_0,\boldsymbol{y}_0)$. 对其关于 x 求导:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{W}}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial x_0}\right)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \boldsymbol{y}_0}\right)\boldsymbol{f}(x_0,\boldsymbol{y}_0)=\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{y}}\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial x_0}+\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{y}}\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \boldsymbol{y}_0}\boldsymbol{f}(x_0,\boldsymbol{y}_0)=\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{y}}\boldsymbol{W}(x)$$

计算其在 $x = x_0$ 处的初始条件:

$$\boldsymbol{W}(x_0) = -\boldsymbol{f}(x_0, \boldsymbol{y}_0) + \boldsymbol{I}\boldsymbol{f}(x_0, \boldsymbol{y}_0) = \boldsymbol{0}$$

由于 $\boldsymbol{W}(x)$ 满足齐次线性常微分方程组且初值为零向量, 由常微分方程解的存在唯一性定理, 必定恒有:

$$\boldsymbol{W}(x) \equiv \boldsymbol{0}$$

即 $\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial x_0}(x; x_0, \boldsymbol{y}_0) + \frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \boldsymbol{y}_0}(x; x_0, \boldsymbol{y}_0)\boldsymbol{f}(x_0, \boldsymbol{y}_0) \equiv \boldsymbol{0}$. 命题得证. □

补充说明：关于 $\boldsymbol{W}(x) \equiv \boldsymbol{0}$ 解的唯一性

最后一步直接得出 $\boldsymbol{W}(x) \equiv \boldsymbol{0}$，其理论依据是常微分方程的 **Picard 存在唯一性定理**：

- **满足 Lipschitz 条件**：$\boldsymbol{W}(x)$ 满足的方程 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{W}}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{y}}\boldsymbol{W}$ 是一个一阶线性齐次微分方程组。由于前提已知 $\boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y})$ 连续可微，故偏导数矩阵 $\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{y}}$ 在有界闭区间上是连续且有界的。这保证了方程右端关于未知量 $\boldsymbol{W}$ 自动满足全局 Lipschitz 条件。
- **零解的必然性**：对于任何线性齐次方程组，恒为零的常向量函数 $\boldsymbol{W}(x) \equiv \boldsymbol{0}$ 显然是方程的一个特解，并且它完美契合我们算出的初始条件 $\boldsymbol{W}(x_0) = \boldsymbol{0}$。

既然 Picard 定理的条件得到满足，那么过初值点 $(x_0, \boldsymbol{0})$ 的解有且仅有一个。因此，满足该初值问题的解只能是这个唯一的零解，即必定恒有 $\boldsymbol{W}(x) \equiv \boldsymbol{0}$。

3. 考虑二阶微分方程

$$x''(t) + cx'(t) + g(x) = p(t),$$

其中 $p(t)$ 是 2π-周期的连续函数, $g(x)$ 是连续可微函数, c 为常数. 假设该方程的解是大范围存在的. 考虑 $(x, x'(t))$-平面上的变换

$$\Phi : (x(0), x'(0)) \mapsto (x(2\pi), x'(2\pi)).$$

证明: 对于 $(x, x'(t))$-平面上的有界区域 D, 有

$$\mathrm{Area}(\Phi(D)) = \mathrm{e}^{-2\pi c}\mathrm{Area}(D).$$

Proof. 令 $x_1 = x$, $x_2 = x'$，将原二阶微分方程转化为一阶线性微分方程组：

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -cx_2 - g(x_1) + p(t) \end{cases}$$

记相空间的点为向量 $\boldsymbol{X} = (x_1, x_2)^T$，对应的向量场为 $\boldsymbol{F}(t, \boldsymbol{X}) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -cx_2 - g(x_1) + p(t) \end{pmatrix}$。计算该向量场关于相变量 $\boldsymbol{X}$ 的散度（即雅可比矩阵的迹）：

$$\nabla \cdot \boldsymbol{F} = \mathrm{tr}\left(\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{X}}\right) = \frac{\partial}{\partial x_1}(x_2) + \frac{\partial}{\partial x_2}(-cx_2 - g(x_1) + p(t)) = 0 - c = -c$$

设 $D(t)$ 为初始有界区域 D 在方程的流作用下，经过时间 t 演化得到的区域。记其面积为 $A(t) = \mathrm{Area}(D(t))$。根据刘维尔公式（Liouville's formula）关于相体积演化的定理，面积 $A(t)$ 随时间的变化率满足：

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \iint_{D(t)} (\nabla \cdot \boldsymbol{F})\, \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 = \iint_{D(t)} (-c)\, \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 = -c\iint_{D(t)} \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 = -cA(t)$$

这是一个关于 $A(t)$ 的一阶常微分方程，求解该方程可得面积随时间的演化规律：

$$A(t) = A(0)\mathrm{e}^{-ct}$$

由题意知，初始时刻 $t=0$ 时的面积 $A(0)=\mathrm{Area}(D)$。变换 Φ 映射到的是 $t=2\pi$ 时的相平面，即 $\Phi(D)=D(2\pi)$。将 $t=2\pi$ 代入面积演化公式：

$$\mathrm{Area}(\Phi(D))=A(2\pi)=A(0)\mathrm{e}^{-c(2\pi)}=\mathrm{e}^{-2\pi c}\mathrm{Area}(D)$$

命题得证. □

4. 求给定微分方程初值问题的解对初值或参数的导数:

(1) $\begin{cases} y'=2x+\mu y^2, \\ y(0)=\mu-1, \end{cases}$ 求 $\left.\frac{\partial y}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}$;

(2) $\begin{cases} y''=\frac{2}{x}-\frac{2}{y}, \\ y(1)=1, y'(1)=\mu, \end{cases}$ 求 $\left.\frac{\partial y}{\partial \mu}\right|_{\mu=1}$.

Proof. (1) 设解为 $y(x,\mu)$，记 $u(x)=\left.\frac{\partial y}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}$。首先求 $\mu=0$ 时的解 $y(x,0)$。将 $\mu=0$ 代入原初值问题：

$$\begin{cases} y'=2x \\ y(0)=-1 \end{cases} \implies y(x,0)=x^2-1$$

将原方程两边对参数 μ 求偏导：

$$\frac{\partial}{\partial \mu}(y')=y^2+2\mu y\frac{\partial y}{\partial \mu} \implies \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial y}{\partial \mu}\right)=y^2+2\mu y\frac{\partial y}{\partial \mu}$$

代入 $\mu=0$ 及 $y(x,0)=x^2-1$，得到 $u(x)$ 满足的微分方程：

$$u'=(x^2-1)^2=x^4-2x^2+1$$

对初始条件 $y(0,\mu)=\mu-1$ 两边对 μ 求导，代入 $\mu=0$ 得：

$$u(0)=1$$

对 $u(x)$ 积分求解：

$$u(x)=\int_0^x(s^4-2s^2+1)\mathrm{d}s+u(0)=\frac{1}{5}x^5-\frac{2}{3}x^3+x+1$$

故 $\left.\frac{\partial y}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}=\frac{1}{5}x^5-\frac{2}{3}x^3+x+1$。

(2) 设解为 $y(x,\mu)$，记 $v(x)=\left.\frac{\partial y}{\partial \mu}\right|_{\mu=1}$。首先求 $\mu=1$ 时的解 $y(x,1)$。将 $\mu=1$ 代入原初值问题：

$$\begin{cases} y''=\frac{2}{x}-\frac{2}{y} \\ y(1)=1, y'(1)=1 \end{cases}$$

观察易知 $y(x,1)=x$ 是该初值问题的一个解，由初值问题解的存在唯一性定理，此即为所求。将原方程两边对参数 μ 求偏导：

$$\frac{\partial}{\partial \mu}(y'')=\frac{2}{y^2}\frac{\partial y}{\partial \mu} \implies \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(\frac{\partial y}{\partial \mu}\right)=\frac{2}{y^2}\frac{\partial y}{\partial \mu}$$

代入 $\mu=1$ 及 $y(x,1)=x$，得到 $v(x)$ 满足的线性变分方程：

$$v''=\frac{2}{x^2}v \implies x^2v''-2v=0$$

对初始条件 $y(1,\mu)=1, y'(1,\mu)=\mu$ 两边对 μ 求偏导，代入 $\mu=1$ 得到 $v(x)$ 的初始条件：

$$v(1)=0,\quad v'(1)=1$$

方程 $x^2v''-2v=0$ 为欧拉方程（见下面的补充说明），设特解形式为 $v=x^r$，代入得特征方程：

$$r(r-1)-2=0 \implies (r-2)(r+1)=0$$

解得 $r_1=2, r_2=-1$。故其通解为 $v(x)=C_1x^2+C_2x^{-1}$。由初始条件确定常数：

$$\begin{cases} v(1)=C_1+C_2=0 \\ v'(1)=2C_1-C_2=1 \end{cases} \implies \begin{cases} C_1=\frac{1}{3} \\ C_2=-\frac{1}{3} \end{cases}$$

故 $v(x)=\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{3x}$。即 $\left.\frac{\partial y}{\partial \mu}\right|_{\mu=1}=\frac{x^3-1}{3x}$。 □

补充说明：第二问中 $\mu=1$ 时解的唯一性依据

在求解第 (2) 题时，我们通过观察"猜"出了特解 $y(x,1)=x$，并直接断言此即为所求。
将原二阶方程写为标准形式 $y''=f(x,y,y')$，其中右端函数为：

$$f(x,y,y')=\frac{2}{x}-\frac{2}{y}$$

初始点状态为：$x_0=1, y(1)=1, y'(1)=1$。
判断解是否唯一，核心在于检查函数 f 在该初始点 $(1,1,1)$ 附近的性质：

- **连续性**：在 $(1,1,1)$ 附近，由于分母 $x\neq 0$ 且 $y\neq 0$，函数 $f(x,y,y')$ 显然是连续的。
- **Lipschitz 条件（偏导数连续）**：考察 f 对未知函数 y 和 y' 的偏导数：

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{2}{y^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y'}=0$$

  在初始点 $y=1$ 的邻域内，分母 $y^2\neq 0$，这两个偏导数也都是连续的。

偏导数在初始点附近连续，意味着方程在初始点附近满足局部的 Lipschitz 条件。根据存在唯一性定理，满足该条件的初值问题在 $x_0=1$ 的某个邻域内，**有且仅有一个解**。我们知道在任一点都局部唯一，所以这就是唯一的一个解。

欧拉 (Euler) 方程补充说明

欧拉方程（具体指二阶柯西-欧拉方程）是一种特殊的变系数线性微分方程，其标准形式为：

$$x^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+ax\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+by=0$$

其中 a,b 为常数。它的核心特点是自变量 x 的幂次与对应导数的阶数完全一致。
1. 求解方法：在 $x>0$ 范围内，尝试设解的形式为 $y=x^r$。将其代入方程：

$$x^2\cdot r(r-1)x^{r-2}+ax\cdot rx^{r-1}+bx^r=0$$

消去 x^r 后得到关于 r 的特征方程（也称指标方程）：

$$r(r-1)+ar+b=0 \implies r^2+(a-1)r+b=0$$

2. 通解的三种情况：设特征方程的判别式为 $\Delta=(a-1)^2-4b$，根为 r_1,r_2：

- **情况 1：两个不相等的实根 ($\Delta>0$)** 通解为：$y=C_1x^{r_1}+C_2x^{r_2}$
- **情况 2：二重实根 ($\Delta=0$)** 此时 $r_1=r_2=\frac{1-a}{2}$，通解为：$y=(C_1+C_2\ln x)x^{r_1}$
- **情况 3：共轭复根 ($\Delta<0$)** 设 $r=\alpha\pm i\beta$，通解为：$y=x^{\alpha}[C_1\cos(\beta\ln x)+C_2\sin(\beta\ln x)]$

5. 证明定理 4.7:
假设函数 $\boldsymbol{f}(x,\boldsymbol{y},\boldsymbol{\lambda})$ 在闭区域

$$G:|x-x_0|\leqslant a,|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_0|\leqslant b,|\boldsymbol{\lambda}|\leqslant c$$

上连续, 且对 $\boldsymbol{y}$ 和 $\boldsymbol{\lambda}$ 有连续偏导数, 则初值问题

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}x}=\boldsymbol{f}(x,\boldsymbol{y},\boldsymbol{\lambda}),\\ \boldsymbol{y}(x_0)=\boldsymbol{y}_0\end{cases}$$

在闭区域 $R:|x-x_0|\leqslant h,|\boldsymbol{\lambda}|\leqslant c$ 上的唯一解 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{\phi}(x;x_0,\boldsymbol{y}_0,\boldsymbol{\lambda})$ 对 $(x_0,\boldsymbol{y}_0,\boldsymbol{\lambda})$ 可微.

Proof. 将初值问题转化为等价的积分方程形式:

$$\boldsymbol{\phi}(x;x_0,\boldsymbol{y}_0,\boldsymbol{\lambda})=\boldsymbol{y}_0+\int_{x_0}^{x}\boldsymbol{f}(s,\boldsymbol{\phi}(s;x_0,\boldsymbol{y}_0,\boldsymbol{\lambda}),\boldsymbol{\lambda})\mathrm{d}s$$

根据解对初值及参数的连续可微性定理, 由于 $\boldsymbol{f}$ 对 $\boldsymbol{y}$ 和 $\boldsymbol{\lambda}$ 具有连续偏导数, 唯一解 $\boldsymbol{\phi}$ 对 $\boldsymbol{y}_0$ 和 $\boldsymbol{\lambda}$ 是连续可微的, 即偏导数 $\frac{\partial\boldsymbol{\phi}}{\partial\boldsymbol{y}_0}$ 和 $\frac{\partial\boldsymbol{\phi}}{\partial\boldsymbol{\lambda}}$ 存在且连续.

对于 x_0 的偏导数, 利用积分方程对下限求导以及链式法则可得:

$$\frac{\partial\boldsymbol{\phi}}{\partial x_0}(x;x_0,\boldsymbol{y}_0,\boldsymbol{\lambda})=-\boldsymbol{f}(x_0,\boldsymbol{y}_0,\boldsymbol{\lambda})+\int_{x_0}^{x}\frac{\partial\boldsymbol{f}}{\partial\boldsymbol{y}}\frac{\partial\boldsymbol{\phi}}{\partial x_0}\mathrm{d}s$$

由此可知 $\frac{\partial\boldsymbol{\phi}}{\partial x_0}$ 满足线性变分方程的初值问题, 结合先前习题 2 的证明结论, 解对初值点与初值的偏导数之间满足恒等式:

$$\frac{\partial\boldsymbol{\phi}}{\partial x_0}(x;x_0,\boldsymbol{y}_0,\boldsymbol{\lambda})=-\frac{\partial\boldsymbol{\phi}}{\partial\boldsymbol{y}_0}(x;x_0,\boldsymbol{y}_0,\boldsymbol{\lambda})\boldsymbol{f}(x_0,\boldsymbol{y}_0,\boldsymbol{\lambda})$$

由于 $\frac{\partial\boldsymbol{\phi}}{\partial\boldsymbol{y}_0}$ 与 $\boldsymbol{f}$ 均连续, 故 $\frac{\partial\boldsymbol{\phi}}{\partial x_0}$ 也连续.

综上, 解 $\boldsymbol{\phi}$ 关于自变量 $(x_0,\boldsymbol{y}_0,\boldsymbol{\lambda})$ 的所有偏导数均存在且连续, 因此解 $\boldsymbol{\phi}$ 对 $(x_0,\boldsymbol{y}_0,\boldsymbol{\lambda})$ 可微. □

5 线性微分方程组

5.1 一般理论

1. 设 $\boldsymbol{\Phi}(x)$ 是齐次线性微分方程组 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}x}=\boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y}$ 的一个基本解矩阵, 并且函数 $\boldsymbol{f}(x,\boldsymbol{y})$ 在区域 $E: a<x<b, |\boldsymbol{y}|<+\infty$ 上连续. 证明: 初值问题

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}x}=\boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y}+\boldsymbol{f}(x,\boldsymbol{y}), \\ \boldsymbol{y}(x_0)=\boldsymbol{y}_0 \end{cases}$$

等价于积分方程

$$\boldsymbol{y}(x)=\boldsymbol{\Phi}(x)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(x_0)\boldsymbol{y}_0+\int_{x_0}^{x}\boldsymbol{\Phi}(x)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s,\boldsymbol{y}(s))\mathrm{d}s,$$

其中 $x_0\in(a,b)$.

Proof. 充分性: 假设 $\boldsymbol{y}(x)$ 满足上述积分方程. 将 $x=x_0$ 代入积分方程, 可得:

$$\boldsymbol{y}(x_0)=\boldsymbol{\Phi}(x_0)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(x_0)\boldsymbol{y}_0+\mathbf{0}=\boldsymbol{y}_0$$

即满足初始条件. 将积分方程两端对 x 求导, 由于 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Phi}}{\mathrm{d}x}=\boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{\Phi}(x)$, 则有:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}x}&=\boldsymbol{\Phi}'(x)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(x_0)\boldsymbol{y}_0+\boldsymbol{\Phi}'(x)\int_{x_0}^{x}\boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s,\boldsymbol{y}(s))\mathrm{d}s+\boldsymbol{\Phi}(x)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(x)\boldsymbol{f}(x,\boldsymbol{y}(x))\\&=\boldsymbol{A}(x)\left[\boldsymbol{\Phi}(x)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(x_0)\boldsymbol{y}_0+\int_{x_0}^{x}\boldsymbol{\Phi}(x)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s,\boldsymbol{y}(s))\mathrm{d}s\right]+\boldsymbol{f}(x,\boldsymbol{y}(x))\\&=\boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y}(x)+\boldsymbol{f}(x,\boldsymbol{y}(x))\end{aligned}$$

故 $\boldsymbol{y}(x)$ 是初值问题的解.

必要性: 利用常数变易法. 设初值问题的解为 $\boldsymbol{y}(x)=\boldsymbol{\Phi}(x)\boldsymbol{c}(x)$, 代入原微分方程得:

$$\boldsymbol{\Phi}'(x)\boldsymbol{c}(x)+\boldsymbol{\Phi}(x)\boldsymbol{c}'(x)=\boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{\Phi}(x)\boldsymbol{c}(x)+\boldsymbol{f}(x,\boldsymbol{y}(x))$$

由于 $\boldsymbol{\Phi}'(x)=\boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{\Phi}(x)$, 上式化简为:

$$\boldsymbol{\Phi}(x)\boldsymbol{c}'(x)=\boldsymbol{f}(x,\boldsymbol{y}(x)) \implies \boldsymbol{c}'(x)=\boldsymbol{\Phi}^{-1}(x)\boldsymbol{f}(x,\boldsymbol{y}(x))$$

从 x_0 到 x 积分得:

$$\boldsymbol{c}(x)=\boldsymbol{c}(x_0)+\int_{x_0}^{x}\boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s,\boldsymbol{y}(s))\mathrm{d}s$$

由于 $\boldsymbol{y}(x_0)=\boldsymbol{y}_0$, 可知 $\boldsymbol{c}(x_0)=\boldsymbol{\Phi}^{-1}(x_0)\boldsymbol{y}_0$. 故:

$$\boldsymbol{c}(x)=\boldsymbol{\Phi}^{-1}(x_0)\boldsymbol{y}_0+\int_{x_0}^{x}\boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s,\boldsymbol{y}(s))\mathrm{d}s$$

将 $\boldsymbol{c}(x)$ 代回 $\boldsymbol{y}(x)=\boldsymbol{\Phi}(x)\boldsymbol{c}(x)$, 得到积分方程:

$$\boldsymbol{y}(x)=\boldsymbol{\Phi}(x)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(x_0)\boldsymbol{y}_0+\int_{x_0}^{x}\boldsymbol{\Phi}(x)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s,\boldsymbol{y}(s))\mathrm{d}s$$

综上, 初值问题与该积分方程等价. 命题得证. □

2. 设当 $x\in(a,b)$ 时, 线性微分方程组 (5.1)

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}x}=\boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y}+\boldsymbol{f}(x)$$

中的函数 $\boldsymbol{f}(x)$ 不恒为零, 证明: 方程组 (5.1) 有且至多有 $n+1$ 个线性无关解.

Proof. 设对应的齐次线性微分方程组为:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}x} = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y}$$

由于未知函数 $\boldsymbol{y}$ 是 n 维向量, 系数矩阵 $\boldsymbol{A}(x)$ 为 $n \times n$ 矩阵, 该齐次方程组的解空间维数为 n, 存在 n 个线性无关的基础解系, 记为 $\boldsymbol{\varphi}_1(x), \boldsymbol{\varphi}_2(x), \ldots, \boldsymbol{\varphi}_n(x)$. 同时, 由于 $\boldsymbol{f}(x)$ 不恒为零, 非齐次方程组 (5.1) 存在一个特解 $\boldsymbol{\psi}^*(x)$, 且 $\boldsymbol{\psi}^*(x)$ 显然不能是齐次方程组的解.

首先证明 (5.1) 至少存在 $n+1$ 个线性无关解. 构造如下 $n+1$ 个解:

$$\boldsymbol{\psi}_i(x) = \boldsymbol{\psi}^*(x) + \boldsymbol{\varphi}_i(x) \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

$$\boldsymbol{\psi}_{n+1}(x) = \boldsymbol{\psi}^*(x)$$

考虑它们的线性组合:

$$\sum_{i=1}^{n+1} k_i \boldsymbol{\psi}_i(x) = \mathbf{0}$$

将构造的解代入上式并整理得到:

$$\left(\sum_{i=1}^{n+1} k_i\right) \boldsymbol{\psi}^*(x) + \sum_{i=1}^{n} k_i \boldsymbol{\varphi}_i(x) = \mathbf{0}$$

若 $\sum_{i=1}^{n+1} k_i \neq 0$, 则有 $\boldsymbol{\psi}^*(x) = -\frac{1}{\sum_{i=1}^{n+1} k_i} \sum_{i=1}^{n} k_i \boldsymbol{\varphi}_i(x)$. 这表明特解 $\boldsymbol{\psi}^*(x)$ 可以由齐次方程组的基础解系线性表出, 即 $\boldsymbol{\psi}^*(x)$ 也是齐次方程组的解, 代入原方程会导致 $\boldsymbol{f}(x) \equiv \mathbf{0}$, 与题设矛盾. 因此必然有 $\sum_{i=1}^{n+1} k_i = 0$. 将其代回上式得:

$$\sum_{i=1}^{n} k_i \boldsymbol{\varphi}_i(x) = \mathbf{0}$$

由于 $\boldsymbol{\varphi}_1(x), \ldots, \boldsymbol{\varphi}_n(x)$ 线性无关, 必须有 $k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0$. 结合 $\sum_{i=1}^{n+1} k_i = 0$, 可进一步推得 $k_{n+1} = 0$. 所以这 $n+1$ 个解 $\boldsymbol{\psi}_1, \ldots, \boldsymbol{\psi}_{n+1}$ 线性无关, 即方程组至少有 $n+1$ 个线性无关解.

其次证明 (5.1) 至多有 $n+1$ 个线性无关解. 假设 (5.1) 存在 $n+2$ 个解 $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \ldots, \boldsymbol{y}_{n+2}$. 构造 $n+1$ 个差值向量:

$$\boldsymbol{z}_j = \boldsymbol{y}_j - \boldsymbol{y}_{n+2} \quad (j = 1, 2, \ldots, n+1)$$

根据线性微分方程组解的性质, 任意两个非齐次方程解的差必定是对应齐次方程组的解. 故 $\boldsymbol{z}_1, \ldots, \boldsymbol{z}_{n+1}$ 均为齐次方程组的解. 因为齐次方程组的解空间维数恰好为 n, 任意 $n+1$ 个解必定线性相关. 故存在不全为零的常数 $c_1, c_2, \ldots, c_{n+1}$ 使得:

$$\sum_{j=1}^{n+1} c_j \boldsymbol{z}_j = \mathbf{0} \implies \sum_{j=1}^{n+1} c_j (\boldsymbol{y}_j - \boldsymbol{y}_{n+2}) = \mathbf{0}$$

展开并整理得:

$$\sum_{j=1}^{n+1} c_j \boldsymbol{y}_j - \left(\sum_{j=1}^{n+1} c_j\right) \boldsymbol{y}_{n+2} = \mathbf{0}$$

令 $c_{n+2} = -\sum_{j=1}^{n+1} c_j$, 则上式可写为 $\sum_{j=1}^{n+2} c_j \boldsymbol{y}_j = \mathbf{0}$. 由于 $c_1, \ldots, c_{n+1}$ 不全为零, 这 $n+2$ 个系数 $c_1, \ldots, c_{n+2}$ 也必定不全为零. 这意味着任意选取的 $n+2$ 个解总是线性相关的. 因此, 方程组至多有 $n+1$ 个线性无关解.

综上所述, 方程组 (5.1) 有且至多有 $n+1$ 个线性无关解. 命题得证. □

3. 证明: 向量组

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

不可能同时满足任何一个三阶齐次线性微分方程组.

Proof. 反证法. 假设这三个向量能同时满足某个三阶齐次线性微分方程组

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y}$$

其中 $\boldsymbol{A}(x) = (a_{ij}(x))_{3\times 3}$ 为系数矩阵.

将第一个解 $\boldsymbol{y}_1 = (1,0,0)^T$ 代入该方程组, 其导数为 $\boldsymbol{y}_1' = (0,0,0)^T$, 则有:

$$\boldsymbol{A}(x)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_{11}(x)\\a_{21}(x)\\a_{31}(x)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

由此可知, 矩阵 $\boldsymbol{A}(x)$ 的第一列元素必定全为 0.

将第二个解 $\boldsymbol{y}_2 = (x,0,0)^T$ 代入该方程组, 计算 $\boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y}_2$:

$$\boldsymbol{A}(x)\begin{pmatrix}x\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}xa_{11}(x)\\xa_{21}(x)\\xa_{31}(x)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

但 $\boldsymbol{y}_2$ 的实际导数为 $\boldsymbol{y}_2' = (1,0,0)^T$. 这导致矛盾.

假设不成立, 命题得证. □

另一种可行做法:

由于多项式 $c_0 + c_1x + c_2x^2$ 恒为零当且仅当 $c_0 = c_1 = c_2 = 0$, 故这个向量组线性无关. 假设它们同时满足一个三阶齐次线性微分方程组, 则它们的 Wronsky 行列式不为 0. 但是实际上

$$\begin{vmatrix}1 & x & x^2\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{vmatrix} \equiv 0,$$

矛盾. 故命题得证.

4. 求解微分方程组

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{2}{t}x + 1,\\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{t}x + y.\end{cases}$$

Proof. 首先求解关于 x 的微分方程:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - \frac{2}{t}x = 1$$

这是一阶线性非齐次常微分方程. 求解可得:

$$x(t) = \mathrm{e}^{\int \frac{2}{t}\mathrm{d}t}\left(\int \mathrm{e}^{-\int \frac{2}{t}\mathrm{d}t}\mathrm{d}t + C_1\right) = t^2\left(\int t^{-2}\mathrm{d}t + C_1\right) = t^2\left(-\frac{1}{t} + C_1\right) = C_1t^2 - t$$

将解得的 $x(t)$ 代入关于 y 的微分方程:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{t}(C_1t^2 - t) + y \implies \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - y = C_1t - 1$$

这同样是一阶线性非齐次常微分方程. 求解可得:

$$\begin{aligned}y(t) &= \mathrm{e}^{\int 1\mathrm{d}t}\left(\int (C_1t-1)\mathrm{e}^{-\int 1\mathrm{d}t}\mathrm{d}t + C_2\right)\\ &= \mathrm{e}^t\left(\int (C_1t-1)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t + C_2\right)\\ &= \mathrm{e}^t\left(-(C_1t-1)\mathrm{e}^{-t} + \int C_1\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t + C_2\right)\\ &= \mathrm{e}^t\left(-C_1t\mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^{-t} - C_1\mathrm{e}^{-t} + C_2\right)\\ &= C_2\mathrm{e}^t - C_1t - C_1 + 1\end{aligned}$$

综上, 原微分方程组的通解为:

$$\begin{cases} x(t) = C_1 t^2 - t, \\ y(t) = C_2 \mathrm{e}^t - C_1 t - C_1 + 1, \end{cases}$$

其中 C_1, C_2 为任意常数. □

如果我们在这题中使用本章节学习过的方法:

将原微分方程组写成矩阵形式:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{y} + \boldsymbol{f}(t)$$

其中 $\boldsymbol{y}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A}(t) = \begin{pmatrix} \frac{2}{t} & 0 \\ \frac{1}{t} & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{f}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

第一步: 求齐次方程组 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{y}$ 的基本解矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(t)$. 对应的齐次方程组为:

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{2}{t}x \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{t}x + y \end{cases}$$

解第一个方程得 $x(t) = C_1 t^2$. 代入第二个方程得 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - y = C_1 t$. 解得 $y(t) = -C_1(t+1) + C_2 \mathrm{e}^t$. 取两组线性无关的解 (分别令 $C_1 = 1, C_2 = 0$ 和 $C_1 = 0, C_2 = 1$):

$$\boldsymbol{\varphi}_1(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ -(t+1) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\varphi}_2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{e}^t \end{pmatrix}$$

从而得到基本解矩阵:

$$\boldsymbol{\Phi}(t) = \begin{pmatrix} t^2 & 0 \\ -(t+1) & \mathrm{e}^t \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t) = \frac{1}{t^2 \mathrm{e}^t} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t & 0 \\ t+1 & t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^{-2} & 0 \\ (t^{-1} + t^{-2})\mathrm{e}^{-t} & \mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t)\boldsymbol{f}(t) = \begin{pmatrix} t^{-2} & 0 \\ (t^{-1} + t^{-2})\mathrm{e}^{-t} & \mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^{-2} \\ (t^{-1} + t^{-2})\mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix}$$

$$\int \boldsymbol{\Phi}^{-1}(t)\boldsymbol{f}(t)\mathrm{d}t = \begin{pmatrix} \int t^{-2}\mathrm{d}t \\ \int (t^{-1} + t^{-2})\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t^{-1} \\ -t^{-1}\mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix}$$

第四步: 代入定理 5.4 的公式求通解. 令任意常数向量为 $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}(t) &= \boldsymbol{\Phi}(t) \left(\boldsymbol{C} + \int \boldsymbol{\Phi}^{-1}(t)\boldsymbol{f}(t)\mathrm{d}t \right) \\ &= \begin{pmatrix} t^2 & 0 \\ -(t+1) & \mathrm{e}^t \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -t^{-1} \\ -t^{-1}\mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix} \right] \\ &= \begin{pmatrix} C_1 t^2 - t \\ -C_1 t - C_1 + 1 + t^{-1} + C_2 \mathrm{e}^t - t^{-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

化简后得到最终解:

$$\begin{cases} x(t) = C_1 t^2 - t \\ y(t) = C_2 \mathrm{e}^t - C_1 t - C_1 + 1 \end{cases}$$

结果与先前用消元法求解的结果完全一致.

5. 考虑初值问题

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}x} = \boldsymbol{f}(x,\boldsymbol{y}), \\ \boldsymbol{y}(x_0) = \boldsymbol{y}_0, \end{cases}$$

其中 $\boldsymbol{f}(x,\boldsymbol{y})$ 关于 x 连续, 关于 $\boldsymbol{y}$ 连续可微. 设 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\phi}(x;x_0,\boldsymbol{y}_0)$ 是其唯一解. 证明:

$$\det \frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial \boldsymbol{y}_0}(x;x_0,\boldsymbol{y}_0) = \mathrm{e}^{\int_{x_0}^{x} \operatorname{tr}\left(\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{y}}(s,\boldsymbol{\phi}(s;x_0,\boldsymbol{y}_0))\right)\mathrm{d}s}.$$

Proof. 记矩阵函数 $\boldsymbol{\Phi}(x) = \frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial \boldsymbol{y}_0}(x;x_0,\boldsymbol{y}_0)$. 对原初值问题两端关于 $\boldsymbol{y}_0$ 求偏导数, 得到 $\boldsymbol{\Phi}(x)$ 满足的变分方程初值问题:

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Phi}}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{y}}(x,\boldsymbol{\phi}(x;x_0,\boldsymbol{y}_0))\boldsymbol{\Phi}(x) \\ \boldsymbol{\Phi}(x_0) = \boldsymbol{I} \end{cases}$$

其中 $\boldsymbol{I}$ 为单位矩阵.

根据刘维尔公式, 齐次线性常微分方程组的解矩阵的行列式 $W(x) = \det \boldsymbol{\Phi}(x)$ 满足:

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}x} = \operatorname{tr}\left(\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{y}}(x,\boldsymbol{\phi}(x;x_0,\boldsymbol{y}_0))\right)W(x)$$

对该一阶齐次线性常微分方程分离变量, 并从 x_0 到 x 积分, 解得:

$$W(x) = W(x_0)\mathrm{e}^{\int_{x_0}^{x} \operatorname{tr}\left(\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{y}}(s,\boldsymbol{\phi}(s;x_0,\boldsymbol{y}_0))\right)\mathrm{d}s}$$

由于初始条件为 $\boldsymbol{\Phi}(x_0) = \boldsymbol{I}$, 故 $W(x_0) = \det \boldsymbol{I} = 1$. 代入上式即得:

$$\det \frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial \boldsymbol{y}_0}(x;x_0,\boldsymbol{y}_0) = \mathrm{e}^{\int_{x_0}^{x} \operatorname{tr}\left(\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{y}}(s,\boldsymbol{\phi}(s;x_0,\boldsymbol{y}_0))\right)\mathrm{d}s}.$$

命题得证. □

解向量：$\boldsymbol{\phi} = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_n \end{pmatrix}$, 初值向量：$\boldsymbol{y}_0 = \begin{pmatrix} y_{01} \\ y_{02} \\ \vdots \\ y_{0n} \end{pmatrix}$

因此，我们将这 $n \times n$ 个偏导数按照规则排列起来，就自然而然地形成了一个 $n \times n$ 的方阵：

$$\frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial \boldsymbol{y}_0} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial y_{01}} & \frac{\partial \phi_1}{\partial y_{02}} & \cdots & \frac{\partial \phi_1}{\partial y_{0n}} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial y_{01}} & \frac{\partial \phi_2}{\partial y_{02}} & \cdots & \frac{\partial \phi_2}{\partial y_{0n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \phi_n}{\partial y_{01}} & \frac{\partial \phi_n}{\partial y_{02}} & \cdots & \frac{\partial \phi_n}{\partial y_{0n}} \end{pmatrix}$$

5.2 常系数线性微分方程组

1. 求解微分方程 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}x}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$, 其中矩阵 $\boldsymbol{A}$ 如下:

(1) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1\\3&4\end{pmatrix}$; (2) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1\\-4&1\end{pmatrix}$;

(3) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-1&1\\1&2&-1\\1&-1&2\end{pmatrix}$; (4) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\1&1&0\\3&0&1\end{pmatrix}$;

(5) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4&-1&-1\\1&2&-1\\1&-1&2\end{pmatrix}$; (6) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\3&-2&-3\\-1&1&2\end{pmatrix}$;

(7) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&-2&-1\\3&-4&-3\\2&-4&0\end{pmatrix}$; (8) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\2&-1&-2\\-1&1&2\end{pmatrix}$.

Proof. (1) 特征方程为 $\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})=\lambda^2-6\lambda+5=0$, 解得特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=5$. 对应于 $\lambda_1=1$, 特征向量为 $\boldsymbol{v}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$. 对应于 $\lambda_2=5$, 特征向量为 $\boldsymbol{v}_2=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$. 通解为:

$$\boldsymbol{y}(x)=C_1\mathrm{e}^{x}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}+C_2\mathrm{e}^{5x}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$$

(2) 特征方程为 $\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})=\lambda^2-2\lambda-3=0$, 解得 $\lambda_1=3,\lambda_2=-1$. 对应于 $\lambda_1=3$, 特征向量为 $\boldsymbol{v}_1=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$. 对应于 $\lambda_2=-1$, 特征向量为 $\boldsymbol{v}_2=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$. 通解为:

$$\boldsymbol{y}(x)=C_1\mathrm{e}^{3x}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}+C_2\mathrm{e}^{-x}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

(3) 特征方程为 $\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})=-(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)=0$, 解得 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=3$. 分别求得对应的特征向量: $\boldsymbol{v}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{v}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{v}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$. 通解为:

$$\boldsymbol{y}(x)=C_1\mathrm{e}^{x}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+C_2\mathrm{e}^{2x}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+C_3\mathrm{e}^{3x}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

(4) 特征方程为 $\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})=-(\lambda-1)(\lambda^2-2\lambda+5)=0$, 解得 $\lambda_1=1,\lambda_{2,3}=1\pm2\mathrm{i}$. 对于 $\lambda_1=1$, 对应的特征向量为 $\boldsymbol{v}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$. 对于复特征值 $\lambda_2=1+2\mathrm{i}$, 对应的特征向量为 $\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}2\mathrm{i}\\1\\3\end{pmatrix}$. 求复值解的实部与虚部: $\mathrm{e}^{(1+2\mathrm{i})x}\begin{pmatrix}2\mathrm{i}\\1\\3\end{pmatrix}=\mathrm{e}^{x}(\cos2x+\mathrm{i}\sin2x)\begin{pmatrix}2\mathrm{i}\\1\\3\end{pmatrix}$, 实部为 $\mathrm{e}^{x}\begin{pmatrix}-2\sin2x\\\cos2x\\3\cos2x\end{pmatrix}$, 虚部为 $\mathrm{e}^{x}\begin{pmatrix}2\cos2x\\\sin2x\\3\sin2x\end{pmatrix}$. 通解为:

$$\boldsymbol{y}(x)=C_1\mathrm{e}^{x}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}+C_2\mathrm{e}^{x}\begin{pmatrix}-2\sin2x\\\cos2x\\3\cos2x\end{pmatrix}+C_3\mathrm{e}^{x}\begin{pmatrix}2\cos2x\\\sin2x\\3\sin2x\end{pmatrix}$$

(5) 特征方程为 $\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})=-(\lambda-2)(\lambda-3)^2=0$, 解得 $\lambda_1=2,\lambda_2=\lambda_3=3$. 对于 $\lambda_1=2$, 特征向量为 $\boldsymbol{v}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. 对于 $\lambda=3$, 解方程组 $(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 即 $x-y-z=0$, 得到两个线性无关的特征向量 $\boldsymbol{v}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{v}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$. 通解为:

$$\boldsymbol{y}(x)=C_1\mathrm{e}^{2x}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+C_2\mathrm{e}^{3x}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+C_3\mathrm{e}^{3x}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

(6) 特征方程为 $\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})=-\lambda(\lambda-1)^2=0$, 解得 $\lambda_1=0,\lambda_2=\lambda_3=1$. 对于 $\lambda_1=0$, 特征向量为 $\boldsymbol{v}_1=\begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix}$. 对于 $\lambda=1$, 解方程组 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 即 $x-y-z=0$, 得到两个线性无关的特征向量 $\boldsymbol{v}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{v}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$. 通解为:

$$\boldsymbol{y}(x)=C_1\begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix}+C_2\mathrm{e}^{x}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+C_3\mathrm{e}^{x}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

(7) 特征方程为 $\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})=-(\lambda+5)(\lambda-2)^2=0$, 解得 $\lambda_1=-5,\lambda_2=\lambda_3=2$. 对于 $\lambda_1=-5$, 特征向量为 $\boldsymbol{v}_1=\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}$. 对于 $\lambda=2$, 解方程组 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 即 $x-2y-z=0$, 得到两个线性无关的特征向量 $\boldsymbol{v}_2=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{v}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$. 通解为:

$$\boldsymbol{y}(x)=C_1\mathrm{e}^{-5x}\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}+C_2\mathrm{e}^{2x}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}+C_3\mathrm{e}^{2x}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

(8) 第一步，求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值. 易知 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}_3)=-(\lambda-1)^3,$$

因此 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=1$, 其重数为 3.

第二步，求方程组 $(\boldsymbol{A}-\lambda_1\boldsymbol{E}_3)^3\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{0}$ 的解. 由于 $(\boldsymbol{A}-\lambda_1\boldsymbol{E}_3)^2=\boldsymbol{0}$, 故自然有 $(\boldsymbol{A}-\lambda_1\boldsymbol{E}_3)^3=\boldsymbol{0}$, 因此得到的三个线性无关解为

$$\boldsymbol{\xi}_{10}^{(1)}=(1,0,0)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\xi}_{20}^{(1)}=(0,1,0)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\xi}_{30}^{(1)}=(0,0,1)^{\mathrm{T}}.$$

第三步，求解矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(x)$. 需要计算 $\boldsymbol{\xi}_{11}^{(1)}, \boldsymbol{\xi}_{12}^{(1)}$ 等, 具体如下:

$$\boldsymbol{\xi}_{11}^{(1)} = (\boldsymbol{A} - \lambda_1 \boldsymbol{E}_3)\boldsymbol{\xi}_{10}^{(1)} = (1, 2, -1)^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{\xi}_{12}^{(1)} = (\boldsymbol{A} - \lambda_1 \boldsymbol{E}_3)^2\boldsymbol{\xi}_{10}^{(1)} = (0, 0, 0)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\xi}_{21}^{(1)} = (\boldsymbol{A} - \lambda_1 \boldsymbol{E}_3)\boldsymbol{\xi}_{20}^{(1)} = (-1, -2, 1)^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{\xi}_{22}^{(1)} = (\boldsymbol{A} - \lambda_1 \boldsymbol{E}_3)^2\boldsymbol{\xi}_{20}^{(1)} = (0, 0, 0)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\xi}_{31}^{(1)} = (\boldsymbol{A} - \lambda_1 \boldsymbol{E}_3)\boldsymbol{\xi}_{30}^{(1)} = (-1, -2, 1)^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{\xi}_{32}^{(1)} = (\boldsymbol{A} - \lambda_1 \boldsymbol{E}_3)^2\boldsymbol{\xi}_{30}^{(1)} = (0, 0, 0)^{\mathrm{T}}.$$

因此

$$\boldsymbol{\Phi}(x) = \begin{pmatrix} 1+x & -x & -x \\ 2x & 1-2x & -2x \\ -x & x & 1+x \end{pmatrix} \mathrm{e}^x.$$

于是, 所给方程组的所有解为

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\Phi}(x)\boldsymbol{c},$$

其中 $\boldsymbol{c}$ 为任意三维常数向量.

□

2. 求解下列非齐次线性微分方程组:

(1) $\begin{cases} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = z + 2\mathrm{e}^x, \\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = y + \mathrm{e}^x; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = z - 5\cos x, \\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = 2y + z; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 4y - 3z + \sin x, \\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = 2y - z - 3\cos x. \end{cases}$

Proof. **解** 这里我们均采用消元法进行求解。

(1) 由第一式得 $z = y' - 2\mathrm{e}^x$, 两边求导得 $z' = y'' - 2\mathrm{e}^x$. 代入第二式消去 z 可得:

$$y'' - 2\mathrm{e}^x = y + \mathrm{e}^x \implies y'' - y = 3\mathrm{e}^x$$

对应的齐次方程 $y'' - y = 0$ 的特征根为 $r = \pm 1$, 故齐次通解为 $y_h = C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{-x}$. 因为 1 是特征单根, 设特解为 $y^* = Ax\mathrm{e}^x$, 代入得 $2A\mathrm{e}^x = 3\mathrm{e}^x$, 解得 $A = \frac{3}{2}$. 故 $y(x) = C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{-x} + \frac{3}{2}x\mathrm{e}^x$. 将其代回 $z = y' - 2\mathrm{e}^x$ 得:

$$z(x) = \left(C_1\mathrm{e}^x - C_2\mathrm{e}^{-x} + \frac{3}{2}\mathrm{e}^x + \frac{3}{2}x\mathrm{e}^x\right) - 2\mathrm{e}^x = C_1\mathrm{e}^x - C_2\mathrm{e}^{-x} + \left(\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^x$$

因此, 原方程组的通解为:

$$\begin{cases} y(x) = C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{-x} + \frac{3}{2}x\mathrm{e}^x, \\ z(x) = C_1\mathrm{e}^x - C_2\mathrm{e}^{-x} + \left(\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^x. \end{cases}$$

(2) 由第一式得 $z = y' + 5\cos x$, 求导得 $z' = y'' - 5\sin x$. 代入第二式消去 z 可得:

$$y'' - 5\sin x = 2y + (y' + 5\cos x) \implies y'' - y' - 2y = 5\sin x + 5\cos x$$

特征方程 $r^2 - r - 2 = 0$ 的根为 $r_1 = 2, r_2 = -1$. 设特解为 $y^* = A\cos x + B\sin x$, 代入非齐次方程得:

$$(-A\cos x - B\sin x) - (-A\sin x + B\cos x) - 2(A\cos x + B\sin x) = 5\sin x + 5\cos x$$

比较对应系数可得:

$$\begin{cases} -3A - B = 5 \\ A - 3B = 5 \end{cases} \implies A = -1, B = -2$$

故 $y(x) = C_1\mathrm{e}^{2x} + C_2\mathrm{e}^{-x} - \cos x - 2\sin x$. 将其代回 $z = y' + 5\cos x$ 得:

$$z(x) = (2C_1\mathrm{e}^{2x} - C_2\mathrm{e}^{-x} + \sin x - 2\cos x) + 5\cos x = 2C_1\mathrm{e}^{2x} - C_2\mathrm{e}^{-x} + 3\cos x + \sin x$$

因此, 原方程组的通解为:

$$\begin{cases} y(x) = C_1\mathrm{e}^{2x} + C_2\mathrm{e}^{-x} - \cos x - 2\sin x, \\ z(x) = 2C_1\mathrm{e}^{2x} - C_2\mathrm{e}^{-x} + 3\cos x + \sin x. \end{cases}$$

(3) 由第一式求导得 $y'' = 4y' - 3z' + \cos x$. 将第二式 z' 代入:

$$y'' = 4y' - 3(2y - z - 3\cos x) + \cos x = 4y' - 6y + 3z + 10\cos x$$

由第一式变换得 $3z = 4y - y' + \sin x$, 代入上式消去 z:

$$y'' = 4y' - 6y + (4y - y' + \sin x) + 10\cos x \implies y'' - 3y' + 2y = \sin x + 10\cos x$$

特征方程 $r^2 - 3r + 2 = 0$ 的根为 $r_1 = 1, r_2 = 2$. 设特解为 $y^* = A\cos x + B\sin x$, 代入非齐次方程得:

$$(-A\cos x - B\sin x) - 3(-A\sin x + B\cos x) + 2(A\cos x + B\sin x) = \sin x + 10\cos x$$

比较对应系数可得:

$$\begin{cases} A - 3B = 10 \\ 3A + B = 1 \end{cases} \implies A = \frac{13}{10}, B = -\frac{29}{10}$$

故 $y(x) = C_1\mathrm{e}^{x} + C_2\mathrm{e}^{2x} + \frac{13}{10}\cos x - \frac{29}{10}\sin x$. 将其代回 $z = \frac{1}{3}(4y - y' + \sin x)$ 计算 $z(x)$:

$$\begin{aligned} z(x) &= \frac{1}{3}\left[4\left(C_1\mathrm{e}^{x} + C_2\mathrm{e}^{2x} + \frac{13}{10}\cos x - \frac{29}{10}\sin x\right) - \left(C_1\mathrm{e}^{x} + 2C_2\mathrm{e}^{2x} - \frac{13}{10}\sin x - \frac{29}{10}\cos x\right) + \sin x\right] \\ &= C_1\mathrm{e}^{x} + \frac{2}{3}C_2\mathrm{e}^{2x} + \frac{27}{10}\cos x - \frac{31}{10}\sin x \end{aligned}$$

因此, 原方程组的通解为:

$$\begin{cases} y(x) = C_1\mathrm{e}^{x} + C_2\mathrm{e}^{2x} + \frac{13}{10}\cos x - \frac{29}{10}\sin x, \\ z(x) = C_1\mathrm{e}^{x} + \frac{2}{3}C_2\mathrm{e}^{2x} + \frac{27}{10}\cos x - \frac{31}{10}\sin x. \end{cases}$$

□

3. 利用常数变易法求解下列非齐次线性微分方程组:

(1) $\begin{cases} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = z + \tan^2 x - 1, \\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = -y + \tan x; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y - z + \frac{1}{\cos x}, \\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = 2y - z. \end{cases}$

Proof. **解** (1) 将原方程组写成矩阵形式 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}x} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{f}(x)$, 其中

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{f}(x) = \begin{pmatrix} \tan^2 x - 1 \\ \tan x \end{pmatrix}.$$

第一步, 求解齐次方程组 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}x} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$. 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程为 $\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}) = \lambda^2+1=0$, 解得特征值为 $\lambda=\pm\mathrm{i}$. 对应于 $\lambda=\mathrm{i}$, 特征向量方程为 $\begin{pmatrix}-\mathrm{i} & 1\\ -1 & -\mathrm{i}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, 取特征向量 $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix}1\\ \mathrm{i}\end{pmatrix}$. 由此得到复值解:

$$\boldsymbol{y}^*(x) = \begin{pmatrix}1\\ \mathrm{i}\end{pmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \begin{pmatrix}\cos x + \mathrm{i}\sin x\\ -\sin x + \mathrm{i}\cos x\end{pmatrix}$$

取其实部和虚部作为两个线性无关的实解, 得到基本解矩阵为:

$$\boldsymbol{\Phi}(x) = \begin{pmatrix}\cos x & \sin x\\ -\sin x & \cos x\end{pmatrix}.$$

第二步, 利用常数变易法求解非齐次方程组. 设通解为 $\boldsymbol{y}(x) = \boldsymbol{\Phi}(x)\boldsymbol{c}(x)$, 代入原方程可得 $\boldsymbol{\Phi}(x)\boldsymbol{c}'(x) = \boldsymbol{f}(x)$, 即 $\boldsymbol{c}'(x) = \boldsymbol{\Phi}^{-1}(x)\boldsymbol{f}(x)$. 易求得逆矩阵 $\boldsymbol{\Phi}^{-1}(x) = \begin{pmatrix}\cos x & -\sin x\\ \sin x & \cos x\end{pmatrix}$. 故

$$\begin{aligned}\boldsymbol{c}'(x) &= \begin{pmatrix}\cos x & -\sin x\\ \sin x & \cos x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tan^2 x - 1\\ \tan x\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\cos x(\tan^2 x-1) - \sin x\tan x\\ \sin x(\tan^2 x - 1) + \cos x\tan x\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\cos x} - \frac{\sin^2 x}{\cos x}\\ \frac{\sin^3 x - \sin x\cos^2 x}{\cos^2 x} + \sin x\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}-\cos x\\ \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

积分求 $\boldsymbol{c}(x)$:

$$c_1(x) = \int(-\cos x)\mathrm{d}x = -\sin x + C_1,$$

$$c_2(x) = \int\frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \int\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\sin x\mathrm{d}x \overset{u=\cos x}{=} \int\left(1-\frac{1}{u^2}\right)\mathrm{d}u = u + \frac{1}{u} + C_2 = \cos x + \sec x + C_2.$$

于是,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{y}(x) &= \begin{pmatrix}\cos x & \sin x\\ -\sin x & \cos x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\sin x + C_1\\ \cos x + \sec x + C_2\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\cos x(-\sin x + C_1) + \sin x(\cos x + \sec x + C_2)\\ -\sin x(-\sin x + C_1) + \cos x(\cos x + \sec x + C_2)\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}C_1\cos x + C_2\sin x + \tan x\\ -C_1\sin x + C_2\cos x + 2\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

故原方程组的通解为:

$$\begin{cases}y(x) = C_1\cos x + C_2\sin x + \tan x,\\ z(x) = -C_1\sin x + C_2\cos x + 2.\end{cases}$$

(2) 将原方程组写成矩阵形式 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}x} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{f}(x)$, 其中

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix}y\\ z\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & -1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{f}(x) = \begin{pmatrix}\frac{1}{\cos x}\\ 0\end{pmatrix}.$$

第一步, 求解齐次方程组 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}x} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$. 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程为 $\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}) = \lambda^2+1=0$, 解得特征值为 $\lambda=\pm\mathrm{i}$. 对应于 $\lambda=\mathrm{i}$, 特征向量方程为 $\begin{pmatrix}1-\mathrm{i} & -1\\ 2 & -1-\mathrm{i}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, 取特征向量 $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix}1\\ 1-\mathrm{i}\end{pmatrix}$. 由此得到复值解:

$$\boldsymbol{y}^*(x) = \begin{pmatrix}1\\ 1-\mathrm{i}\end{pmatrix}(\cos x + \mathrm{i}\sin x) = \begin{pmatrix}\cos x + \mathrm{i}\sin x\\ \cos x + \sin x + \mathrm{i}(\sin x - \cos x)\end{pmatrix}$$

取其实部和虚部, 得到基本解矩阵为:

$$\boldsymbol{\Phi}(x)=\begin{pmatrix}\cos x & \sin x\\ \cos x+\sin x & \sin x-\cos x\end{pmatrix}.$$

第二步, 利用常数变易法求非齐次方程组. 根据 $\boldsymbol{c}'(x)=\boldsymbol{\Phi}^{-1}(x)\boldsymbol{f}(x)$, 首先求出逆矩阵:

$$\boldsymbol{\Phi}^{-1}(x)=\frac{1}{-\cos^2 x+\cos x\sin x-\sin x\cos x-\sin^2 x}\begin{pmatrix}\sin x-\cos x & -\sin x\\ -(\cos x+\sin x) & \cos x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos x-\sin x & \sin x\\ \cos x+\sin x & -\cos x\end{pmatrix}.$$

故

$$\boldsymbol{c}'(x)=\begin{pmatrix}\cos x-\sin x & \sin x\\ \cos x+\sin x & -\cos x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\cos x}\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-\tan x\\ 1+\tan x\end{pmatrix}.$$

积分求 $\boldsymbol{c}(x)$:

$$c_1(x)=\int(1-\tan x)\mathrm{d}x=x+\ln|\cos x|+C_1,$$

$$c_2(x)=\int(1+\tan x)\mathrm{d}x=x-\ln|\cos x|+C_2.$$

于是,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{y}(x)&=\begin{pmatrix}\cos x & \sin x\\ \cos x+\sin x & \sin x-\cos x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x+\ln|\cos x|+C_1\\ x-\ln|\cos x|+C_2\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\cos x(x+\ln|\cos x|+C_1)+\sin x(x-\ln|\cos x|+C_2)\\ (\cos x+\sin x)(x+\ln|\cos x|+C_1)+(\sin x-\cos x)(x-\ln|\cos x|+C_2)\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}C_1\cos x+C_2\sin x+x(\cos x+\sin x)+(\cos x-\sin x)\ln|\cos x|\\ C_1(\cos x+\sin x)+C_2(\sin x-\cos x)+2x\sin x+2\cos x\ln|\cos x|\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

故原方程组的通解为:

$$\begin{cases}y(x)=C_1\cos x+C_2\sin x+x(\cos x+\sin x)+(\cos x-\sin x)\ln|\cos x|,\\ z(x)=C_1(\cos x+\sin x)+C_2(\sin x-\cos x)+2x\sin x+2\cos x\ln|\cos x|.\end{cases}$$

□

4. 若微分方程组 $\boldsymbol{y}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}+\boldsymbol{f}(x)$ 对于每个以 ω 为周期的连续向量函数 $\boldsymbol{f}(x)$ 都具有以 ω 为周期的解, 需要对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值加上什么条件?

解 设常系数非齐次线性微分方程组为 $\boldsymbol{y}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}+\boldsymbol{f}(x)$.

第一步：证明寻找周期解等价于寻找满足 $\boldsymbol{y}(\omega)=\boldsymbol{y}(0)$ 的初值.

设存在一个解 $\boldsymbol{y}(x)$ 满足 $\boldsymbol{y}(\omega)=\boldsymbol{y}(0)$. 构造新函数 $\boldsymbol{z}(x)=\boldsymbol{y}(x+\omega)$. 求导得 $\boldsymbol{z}'(x)=\boldsymbol{y}'(x+\omega)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}(x+\omega)+\boldsymbol{f}(x+\omega)$. 由 $\boldsymbol{f}(x)$ 的周期性 $\boldsymbol{f}(x+\omega)=\boldsymbol{f}(x)$, 有 $\boldsymbol{z}'(x)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{z}(x)+\boldsymbol{f}(x)$, 故 $\boldsymbol{z}(x)$ 也是原方程的解. 同时 $\boldsymbol{z}(0)=\boldsymbol{y}(\omega)=\boldsymbol{y}(0)$. 根据初值问题解的唯一性定理, 满足相同微分方程且初值相同的解必重合, 故 $\boldsymbol{z}(x)\equiv\boldsymbol{y}(x)$, 即 $\boldsymbol{y}(x+\omega)\equiv\boldsymbol{y}(x)$ 对任意 x 成立. 因此, 方程组有 ω 周期解的充要条件是存在某个解满足 $\boldsymbol{y}(\omega)=\boldsymbol{y}(0)$.

第二步：利用常数变易公式求解条件.

利用常数变易公式, 方程组满足初值条件 $\boldsymbol{y}(0)=\boldsymbol{y}_0$ 的解可表示为:

$$\boldsymbol{y}(x)=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}x}\boldsymbol{y}_0+\int_0^x\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(x-s)}\boldsymbol{f}(s)\mathrm{d}s$$

令 $\boldsymbol{y}(\omega)=\boldsymbol{y}(0)=\boldsymbol{y}_0$, 代入上式得:

$$\boldsymbol{y}_0=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}\omega}\boldsymbol{y}_0+\int_0^\omega\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(\omega-s)}\boldsymbol{f}(s)\mathrm{d}s$$

整理得关于未知向量 $\boldsymbol{y}_0$ 的代数方程组:

$$(\boldsymbol{E}-\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}\omega})\boldsymbol{y}_0=\int_0^\omega \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(\omega-s)}\boldsymbol{f}(s)\mathrm{d}s$$

题设要求对于**每个**连续周期函数 $\boldsymbol{f}(x)$, 该方程组都存在周期解. 这意味着无论等式右端的积分常向量取何值, 上述关于 $\boldsymbol{y}_0$ 的线性代数方程组都必须有解. 其充要条件是系数矩阵非奇异, 即:

$$\det(\boldsymbol{E}-\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}\omega})\neq 0$$

这等价于 1 不能是矩阵 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}\omega}$ 的特征值.

设 λ 为 $\boldsymbol{A}$ 的任意特征值, 则 $\mathrm{e}^{\lambda\omega}$ 为 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}\omega}$ 的特征值. 故必须满足:

$$\mathrm{e}^{\lambda\omega}\neq 1$$

由复变函数性质, $\mathrm{e}^z=1 \iff z=2k\pi\mathrm{i}\ (k\in\mathbb{Z})$. 因此:

$$\lambda\omega\neq 2k\pi\mathrm{i} \implies \lambda\neq\frac{2k\pi}{\omega}\mathrm{i}\quad (k\in\mathbb{Z})$$

综上所述, 需要对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值加上的条件是: $\boldsymbol{A}$ 的任何特征值都不能是纯虚数 $\frac{2\pi}{\omega}\mathrm{i}$ 的整数倍 (包括 0). □

5.3 高阶线性微分方程

1. 求解下列微分方程:
(1) $y''+y'-2y=0$;
(2) $y''+4y=0$;
(3) $y^{(4)}-5y''+4y=0$;
(4) $y''+y=4\sin x$;
(5) $y''-4y'+8y=\mathrm{e}^{2x}+\sin 2x$;
(6) $y''-2y'+y=6x\mathrm{e}^x$;
(7) $y''-6y'+8y=5x\mathrm{e}^{2x}+2\mathrm{e}^{4x}\sin x$.

解 (1) 特征方程为 $r^2+r-2=0$, 解得 $r_1=1, r_2=-2$. 故原方程的通解为:

$$y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{-2x}$$

(2) 特征方程为 $r^2+4=0$, 解得 $r=\pm 2\mathrm{i}$. 故原方程的通解为:

$$y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$$

(3) 特征方程为 $r^4-5r^2+4=0$, 即 $(r^2-1)(r^2-4)=0$, 解得 $r=\pm1,\pm2$. 故原方程的通解为:

$$y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{-x}+C_3\mathrm{e}^{2x}+C_4\mathrm{e}^{-2x}$$

(4) 对应的齐次方程 $y''+y=0$ 的特征根为 $r=\pm\mathrm{i}$. 由于非齐次项 $f(x)=4\sin x$, 且 i 是特征单根, 故设特解为 $y^*=x(A\cos x+B\sin x)$. 求导得:

$$y^{*\prime}=(A+Bx)\cos x+(B-Ax)\sin x$$
$$y^{*\prime\prime}=(2B-Ax)\cos x-(2A+Bx)\sin x$$

代入原方程得: $-2A\sin x+2B\cos x=4\sin x$. 比较系数得 $A=-2, B=0$. 故特解为 $y^*=-2x\cos x$. 原方程的通解为:

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x-2x\cos x$$

(5) 对应的齐次方程 $y''-4y'+8y=0$ 的特征根为 $r^2-4r+8=0$, 解得 $r=2\pm 2\mathrm{i}$. 对于 $f_1(x)=\mathrm{e}^{2x}$, 由于 2 不是特征根, 设特解 $y_1^*=A\mathrm{e}^{2x}$. 代入方程得 $4A-8A+8A=1 \implies A=\frac{1}{4}$. 对于 $f_2(x)=\sin 2x$, 由于 2i 不是特征根, 设特解 $y_2^*=B\cos 2x+C\sin 2x$. 代入方程得:

$$(-4B\cos 2x-4C\sin 2x)-4(-2B\sin 2x+2C\cos 2x)+8(B\cos 2x+C\sin 2x)=\sin 2x$$

整理得 $(4B-8C)\cos 2x+(8B+4C)\sin 2x=\sin 2x$. 比较系数有 $4B-8C=0$ 且 $8B+4C=1$, 解得 $B=\frac{1}{10}, C=\frac{1}{20}$. 故原方程的通解为:

$$y=\mathrm{e}^{2x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)+\frac{1}{4}\mathrm{e}^{2x}+\frac{1}{10}\cos 2x+\frac{1}{20}\sin 2x$$

(6) 对应的齐次方程 $y''-2y'+y=0$ 的特征根为 $r=1$ (二重根). 由于非齐次项 $f(x)=6x\mathrm{e}^x$, 且 1 是特征二重根, 设特解为 $y^*=x^2(Ax+B)\mathrm{e}^x=(Ax^3+Bx^2)\mathrm{e}^x$. 为计算简便, 可作代换令 $y=u\mathrm{e}^x$, 则 $y''-2y'+y=u''\mathrm{e}^x=6x\mathrm{e}^x$. 从而 $u''=6x$, 积分两次可得特解 $u=x^3$, 故 $y^*=x^3\mathrm{e}^x$. 原方程的通解为:

$$y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^x+x^3\mathrm{e}^x$$

(7) 对应的齐次方程 $y''-6y'+8y=0$ 的特征根为 $r^2-6r+8=0$, 解得 $r_1=2, r_2=4$. 对于 $f_1(x)=5x\mathrm{e}^{2x}$, 由于 2 是特征单根, 设 $y_1^*=x(Ax+B)\mathrm{e}^{2x}$. 令 $y=u\mathrm{e}^{2x}$, 代入原方程左端化简为 $(u''-2u')\mathrm{e}^{2x}=5x\mathrm{e}^{2x}$. 将 $u=Ax^2+Bx$ 代入 $u''-2u'=5x$, 得 $2A-2(2Ax+B)=5x$, 即 $-4Ax+(2A-2B)=5x$. 解得 $A=-\frac{5}{4}, B=-\frac{5}{4}$, 故 $y_1^*=-\frac{5}{4}(x^2+x)\mathrm{e}^{2x}$. 对于 $f_2(x)=2\mathrm{e}^{4x}\sin x$, 由于 $4+\mathrm{i}$ 不是特征根, 令 $y=v\mathrm{e}^{4x}$, 代入原方程左端化简为 $(v''+2v')\mathrm{e}^{4x}=2\mathrm{e}^{4x}\sin x$. 设 $v=C\cos x+D\sin x$, 代入 $v''+2v'=2\sin x$, 得 $(-C\cos x-D\sin x)+2(-C\sin x+D\cos x)=2\sin x$. 比较系数有 $-C+2D=0$ 且 $-2C-D=2$, 解得 $C=-\frac{4}{5}, D=-\frac{2}{5}$. 故 $y_2^*=-\frac{1}{5}(4\cos x+2\sin x)\mathrm{e}^{4x}$. 原方程的通解为:

$$y=C_1\mathrm{e}^{2x}+C_2\mathrm{e}^{4x}-\frac{5}{4}(x^2+x)\mathrm{e}^{2x}-\frac{2}{5}(2\cos x+\sin x)\mathrm{e}^{4x}$$

□

2. 利用常数变易法求解下列微分方程:
(1) $y''-2y'+y=x^{-1}\mathrm{e}^x$;
(2) $y''+4y=2\tan x$;
(3) $y''-y=x^{-1}-2x^{-3}$.

解 (1) 对应的齐次方程 $y''-2y'+y=0$ 的特征方程为 $r^2-2r+1=0$, 解得二重特征根 $r_1=r_2=1$. 齐次方程的基础解系为 $y_1=\mathrm{e}^x, y_2=x\mathrm{e}^x$. 利用常数变易法, 设非齐次方程的通解为 $y=C_1(x)\mathrm{e}^x+C_2(x)x\mathrm{e}^x$. 列出常数变易法的方程组:

$$\begin{cases} C_1'(x)\mathrm{e}^x+C_2'(x)x\mathrm{e}^x=0 \\ C_1'(x)\mathrm{e}^x+C_2'(x)(x+1)\mathrm{e}^x=x^{-1}\mathrm{e}^x \end{cases}$$

将第二式减去第一式, 可得:

$$C_2'(x)\mathrm{e}^x=x^{-1}\mathrm{e}^x \implies C_2'(x)=x^{-1}$$

代入第一式可得:

$$C_1'(x)=-xC_2'(x)=-1$$

分别对 $C_1'(x)$ 和 $C_2'(x)$ 积分:

$$C_1(x)=\int(-1)\mathrm{d}x=-x+C_1$$
$$C_2(x)=\int x^{-1}\mathrm{d}x=\ln|x|+C_2$$

将 $C_1(x)$ 和 $C_2(x)$ 代回通解表达式:

$$\begin{aligned}y&=(-x+C_1)\mathrm{e}^x+(\ln|x|+C_2)x\mathrm{e}^x\\&=C_1\mathrm{e}^x+C_2x\mathrm{e}^x-x\mathrm{e}^x+x\mathrm{e}^x\ln|x|\end{aligned}$$

由于 $-x\mathrm{e}^x$ 可以并入 $C_2x\mathrm{e}^x$ 的常数项中, 原方程的通解可以化简为:

$$y=C_1\mathrm{e}^x+C_2x\mathrm{e}^x+x\mathrm{e}^x\ln|x|$$

(2) 对应的齐次方程 $y''+4y=0$ 的特征方程为 $r^2+4=0$, 解得特征根 $r=\pm2\mathrm{i}$. 齐次方程的基础解系为 $y_1=\cos2x, y_2=\sin2x$. 设非齐次方程的通解为 $y=C_1(x)\cos2x+C_2(x)\sin2x$. 列出常数变易法的方程组:

$$\begin{cases}C_1'(x)\cos2x+C_2'(x)\sin2x=0\\-2C_1'(x)\sin2x+2C_2'(x)\cos2x=2\tan x\end{cases}$$

解此方程组: 由第一式得 $C_2'(x)=-C_1'(x)\frac{\cos2x}{\sin2x}$, 代入第二式化简可直接解得:

$$\begin{aligned}&C_1'(x)=-\sin2x\tan x=-2\sin^2x=\cos2x-1\\&C_2'(x)=\cos2x\tan x=(2\cos^2x-1)\frac{\sin x}{\cos x}=2\sin x\cos x-\frac{\sin x}{\cos x}=\sin2x-\tan x\end{aligned}$$

分别积分可得:

$$\begin{aligned}C_1(x)&=\int(\cos2x-1)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sin2x-x+C_1\\C_2(x)&=\int(\sin2x-\tan x)\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\cos2x+\ln|\cos x|+C_2\end{aligned}$$

代回通解表达式:

$$\begin{aligned}y&=\left(\frac{1}{2}\sin2x-x+C_1\right)\cos2x+\left(-\frac{1}{2}\cos2x+\ln|\cos x|+C_2\right)\sin2x\\&=C_1\cos2x+C_2\sin2x+\frac{1}{2}\sin2x\cos2x-x\cos2x-\frac{1}{2}\cos2x\sin2x+\sin2x\ln|\cos x|\\&=C_1\cos2x+C_2\sin2x-x\cos2x+\sin2x\ln|\cos x|\end{aligned}$$

(3) 对应的齐次方程 $y''-y=0$ 的特征方程为 $r^2-1=0$, 解得特征根 $r=\pm1$. 齐次方程的基础解系为 $y_1=\mathrm{e}^x, y_2=\mathrm{e}^{-x}$. 设非齐次方程的通解为 $y=C_1(x)\mathrm{e}^x+C_2(x)\mathrm{e}^{-x}$. 列出常数变易法的方程组:

$$\begin{cases}C_1'(x)\mathrm{e}^x+C_2'(x)\mathrm{e}^{-x}=0\\C_1'(x)\mathrm{e}^x-C_2'(x)\mathrm{e}^{-x}=x^{-1}-2x^{-3}\end{cases}$$

两式相加并除以 2, 两式相减并除以 2, 分别得到:

$$\begin{aligned}C_1'(x)&=\frac{1}{2}(x^{-1}-2x^{-3})\mathrm{e}^{-x}\\C_2'(x)&=-\frac{1}{2}(x^{-1}-2x^{-3})\mathrm{e}^{x}\end{aligned}$$

对 $C_1'(x)$ 采用分部积分法求解 (注意拆项与凑微分规律):

$$\begin{aligned}C_1(x)&=\frac{1}{2}\int(x^{-1}-2x^{-3})\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left(\int x^{-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x+\int\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}(x^{-2})\right)\\&=\frac{1}{2}\left(\int x^{-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x+x^{-2}\mathrm{e}^{-x}-\int x^{-2}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}(-x)\right)\\&=\frac{1}{2}\left(\int x^{-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x+x^{-2}\mathrm{e}^{-x}-\int\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}(x^{-1})\right)\\&=\frac{1}{2}\left(\int x^{-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x+x^{-2}\mathrm{e}^{-x}-x^{-1}\mathrm{e}^{-x}-\int x^{-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x\right)\\&=\frac{1}{2}(x^{-2}-x^{-1})\mathrm{e}^{-x}+C_1\end{aligned}$$

同理, 对 $C_2'(x)$ 积分:

$$\begin{aligned}
C_2(x) &= -\frac{1}{2}\int (x^{-1}-2x^{-3})\mathrm{e}^x\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\left(\int x^{-1}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x + \int \mathrm{e}^x\mathrm{d}(x^{-2})\right) \\
&= -\frac{1}{2}\left(\int x^{-1}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x + x^{-2}\mathrm{e}^x - \int x^{-2}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x\right) \\
&= -\frac{1}{2}\left(\int x^{-1}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x + x^{-2}\mathrm{e}^x + \int \mathrm{e}^x\mathrm{d}(x^{-1})\right) \\
&= -\frac{1}{2}\left(\int x^{-1}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x + x^{-2}\mathrm{e}^x + x^{-1}\mathrm{e}^x - \int x^{-1}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x\right) \\
&= -\frac{1}{2}(x^{-2}+x^{-1})\mathrm{e}^x + C_2
\end{aligned}$$

最后将 $C_1(x)$ 和 $C_2(x)$ 代回通解表达式:

$$\begin{aligned}
y &= \left[\frac{1}{2}(x^{-2}-x^{-1})\mathrm{e}^{-x}+C_1\right]\mathrm{e}^x + \left[-\frac{1}{2}(x^{-2}+x^{-1})\mathrm{e}^x + C_2\right]\mathrm{e}^{-x} \\
&= C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{-x} + \frac{1}{2}(x^{-2}-x^{-1}) - \frac{1}{2}(x^{-2}+x^{-1}) \\
&= C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{-x} - x^{-1}
\end{aligned}$$

□

3. 考虑微分方程

$$y'' + ay' + by = f(x),$$

其中 a, b 为常数, 连续函数 $f(x)$ 满足 $|f(x)| \leqslant m$, 而对应的特征方程的根为 λ_1, λ_2, 且 $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$. 求出该方程的有界解, 并证明:

(1) 该方程的其他解当 $x \to +\infty$ 时趋向于有界解;

(2) 如果 $f(x)$ 是周期函数, 则该方程的有界解也是周期的.

解 首先求该方程的有界解. 齐次方程 $y''+ay'+by=0$ 的特征根为 λ_1, λ_2. 齐次方程的基础解系为 $y_1(x) = \mathrm{e}^{\lambda_1 x}, y_2(x) = \mathrm{e}^{\lambda_2 x}$. 利用常数变易法求非齐次方程的特解, 其 Wronsky 行列式为:

$$W(x) = \begin{vmatrix} \mathrm{e}^{\lambda_1 x} & \mathrm{e}^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1\mathrm{e}^{\lambda_1 x} & \lambda_2\mathrm{e}^{\lambda_2 x} \end{vmatrix} = (\lambda_2-\lambda_1)\mathrm{e}^{(\lambda_1+\lambda_2)x}$$

$$\begin{aligned}
y^*(x) &= \int_{-\infty}^{x} \frac{y_1(s)y_2(x)-y_1(x)y_2(s)}{W(s)} f(s)\mathrm{d}s \\
&= \int_{-\infty}^{x} \frac{\mathrm{e}^{\lambda_1 s}\mathrm{e}^{\lambda_2 x}-\mathrm{e}^{\lambda_1 x}\mathrm{e}^{\lambda_2 s}}{(\lambda_2-\lambda_1)\mathrm{e}^{(\lambda_1+\lambda_2)s}} f(s)\mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\int_{-\infty}^{x}\left[\mathrm{e}^{\lambda_1(x-s)}-\mathrm{e}^{\lambda_2(x-s)}\right] f(s)\mathrm{d}s
\end{aligned}$$

下面验证 $y^*(x)$ 确实是一个有界解. 由已知条件 $|f(x)| \leqslant m$, 对上式取绝对值并放缩:

$$|y^*(x)| \leqslant \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\int_{-\infty}^{x}\left|\mathrm{e}^{\lambda_1(x-s)}-\mathrm{e}^{\lambda_2(x-s)}\right||f(s)|\mathrm{d}s$$

$$|y^*(x)| \leqslant \frac{m}{\lambda_1-\lambda_2}\int_{-\infty}^{x}\left(\mathrm{e}^{\lambda_1(x-s)}-\mathrm{e}^{\lambda_2(x-s)}\right)\mathrm{d}s = \frac{m}{\lambda_1\lambda_2}$$

由于 λ_1, λ_2 均为常数, 故 $|y^*(x)|$ 存在有限的上界 $\frac{m}{\lambda_1\lambda_2}$, 即 $y^*(x)$ 就是所求的方程的有界解.

(1) 原非齐次微分方程的任意解 $y(x)$ 均可表示为通解与特解之和:

$$y(x) = C_1\mathrm{e}^{\lambda_1 x} + C_2\mathrm{e}^{\lambda_2 x} + y^*(x)$$

考察该解与有界解 $y^*(x)$ 的差值:

$$y(x)-y^*(x)=C_1\mathrm{e}^{\lambda_1 x}+C_2\mathrm{e}^{\lambda_2 x}$$

因为特征根满足 $\lambda_2<\lambda_1<0$, 所以当 $x\to+\infty$ 时, $\mathrm{e}^{\lambda_1 x}\to 0$ 且 $\mathrm{e}^{\lambda_2 x}\to 0$. 从而 $\lim\limits_{x\to+\infty}(y(x)-y^*(x))=0$. 这就证明了方程的任何其他解当 $x\to+\infty$ 时, 都会无限趋近于该有界解.

(2) 设 $f(x)$ 是以 T 为周期的函数, 即对任意 x 满足 $f(x+T)=f(x)$. 将 $x+T$ 代入有界解 $y^*(x)$ 的积分表达式中:

$$y^*(x+T)=\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\int_{-\infty}^{x+T}\left[\mathrm{e}^{\lambda_1(x+T-s)}-\mathrm{e}^{\lambda_2(x+T-s)}\right]f(s)\mathrm{d}s$$

作变量代换令 $v=s-T$, 则 $s=v+T$, $\mathrm{d}s=\mathrm{d}v$. 当 $s\to-\infty$ 时 $v\to-\infty$; 当 $s=x+T$ 时 $v=x$. 代入积分式得:

$$\begin{aligned}y^*(x+T)&=\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\int_{-\infty}^{x}\left[\mathrm{e}^{\lambda_1(x+T-(v+T))}-\mathrm{e}^{\lambda_2(x+T-(v+T))}\right]f(v+T)\mathrm{d}v\\&=\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\int_{-\infty}^{x}\left[\mathrm{e}^{\lambda_1(x-v)}-\mathrm{e}^{\lambda_2(x-v)}\right]f(v)\mathrm{d}v\\&=y^*(x)\end{aligned}$$

这表明 $y^*(x+T)=y^*(x)$ 对所有 x 恒成立, 因此该有界解也是以 T 为周期的函数. 证明完毕. □

4. 证明: 微分方程 $y''-x^2y=0$ 以 $y(0)=1, y'(0)=0$ 为初始条件的解是一个处处为正的偶函数.

解 设 $y=\phi(x)$ 是该初值问题的解. 我们分两步进行证明.

第一步: 证明 $\phi(x)$ 是偶函数. 构造一个新函数 $\psi(x)=\phi(-x)$. 对其求导可得:

$$\psi'(x)=-\phi'(-x)$$

$$\psi''(x)=\phi''(-x)$$

将 $\psi(x)$ 代入原微分方程的左边:

$$\psi''(x)-x^2\psi(x)=\phi''(-x)-x^2\phi(-x)=\phi''(-x)-(-x)^2\phi(-x)$$

因为 $\phi(x)$ 是原方程的解, 故 $\phi''(-x)-(-x)^2\phi(-x)=0$ 恒成立. 这说明 $\psi(x)$ 同样满足微分方程 $y''-x^2y=0$. 再检验 $\psi(x)$ 的初始条件:

$$\psi(0)=\phi(0)=1$$

$$\psi'(0)=-\phi'(0)=-0=0$$

可以看出, $\psi(x)$ 和 $\phi(x)$ 满足完全相同的二阶线性常微分方程以及完全相同的初始条件. 根据初值问题解的唯一性定理, 必定有 $\psi(x)\equiv\phi(x)$, 即 $\phi(-x)=\phi(x)$ 对所有 x 恒成立. 故该方程的解是一个偶函数.

第二步: 证明 $\phi(x)$ 处处为正. 由第一步可知解是偶函数, 因此我们只需要证明当 $x\geqslant 0$ 时, 有 $\phi(x)>0$ 即可. 已知初始条件 $\phi(0)=1>0$. 由函数的连续性可知, 在 $x=0$ 的右侧存在一个邻域, 在此邻域内 $\phi(x)>0$. 假设 $\phi(x)$ 并非对所有 $x\geqslant 0$ 都为正, 由于它是连续函数, 则必定存在一个最小的正零点 $x_0>0$, 使得 $\phi(x_0)=0$, 并且对于所有的 $x\in[0,x_0)$ 都有 $\phi(x)>0$. 在区间 $(0,x_0)$ 内, 因为 $x>0$ 且 $\phi(x)>0$, 根据原微分方程 $\phi''(x)=x^2\phi(x)$, 我们可以推导出:

$$\phi''(x)>0\quad(x\in(0,x_0))$$

这意味着导函数 $\phi'(x)$ 在区间 $[0,x_0]$ 上是严格单调递增的. 又因为 $\phi'(0)=0$, 所以对于任意 $x\in(0,x_0]$, 都有 $\phi'(x)>\phi'(0)=0$. 既然一阶导数 $\phi'(x)>0$, 这表明原函数 $\phi(x)$ 在区间 $[0,x_0]$ 上是严格单调递增的. 因此, 必定有:

$$\phi(x_0)>\phi(0)=1>0$$

这与我们之前假设的 $\phi(x_0)=0$ 产生了矛盾. 这个矛盾说明, 不存在这样的正零点 x_0. 从而对于所有的 $x\geqslant 0$, 都有 $\phi(x)>0$. 再结合 $\phi(x)$ 是偶函数的性质, 即可得出对于所有的实数 x, 该解都满足 $\phi(x)>0$.

综上所述, 该初值问题的解是一个处处为正的偶函数. 命题得证. □

5. 考虑微分方程 $y''+y=0$. 设 $y=c(x)$ 和 $y=s(x)$ 分别是该方程满足初始条件

$$c(0)=1,\quad c'(0)=0$$

和

$$s(0)=0,\quad s'(0)=1$$

的解. 不求解微分方程, 请证明:
(1) $c(x)$ 是偶函数, $s(x)$ 是奇函数;
(2) $s^2(x)+c^2(x)\equiv 1$;
(3) $s(\alpha+\beta)=s(\alpha)c(\beta)+c(\alpha)s(\beta)$;
(4) 如果 τ 是 $c(x)$ 在 $x>0$ 上的第一个零点, 则 $c(x)$ 和 $s(x)$ 均是以 4τ 为周期的.

解 我们首先来证明：$s'(x)=c(x)$ 与 $c'(x)=-s(x)$。

令 $u(x)=s'(x)$，对其求导得 $u''(x)=s'''(x)$。由于 $s''(x)+s(x)=0$，两端求导得 $s'''(x)+s'(x)=0$，即 $u''(x)+u(x)=0$。考察其初值：$u(0)=s'(0)=1$，$u'(0)=s''(0)=-s(0)=0$。可见 $u(x)$ 满足与 $c(x)$ 完全相同的微分方程和初始条件，由解的唯一性定理得 $u(x)\equiv c(x)$，即 $s'(x)=c(x)$。同理，令 $v(x)=-c'(x)$，则 $v''(x)+v(x)=-(c'''(x)+c'(x))=-(c''(x)+c(x))'=0$。其初值：$v(0)=-c'(0)=0$，$v'(0)=-c''(0)=c(0)=1$。可见 $v(x)$ 满足与 $s(x)$ 完全相同的微分方程和初始条件，由唯一性定理得 $v(x)\equiv s(x)$，即 $c'(x)=-s(x)$。

(1) 证明 $c(x)$ 是偶函数，$s(x)$ 是奇函数

令 $y_1(x)=c(-x)$，则 $y_1''(x)+y_1(x)=c''(-x)+c(-x)=0$。初始条件为 $y_1(0)=c(0)=1$，$y_1'(0)=-c'(0)=0$。$y_1(x)$ 与 $c(x)$ 满足相同的初值问题，由解的唯一性定理得 $c(-x)\equiv c(x)$，故 $c(x)$ 是偶函数。令 $y_2(x)=-s(-x)$，则 $y_2''(x)+y_2(x)=-s''(-x)-s(-x)=-(-s(-x))-s(-x)=0$。初始条件为 $y_2(0)=-s(0)=0$，$y_2'(0)=s'(0)=1$。$y_2(x)$ 与 $s(x)$ 满足相同的初值问题，由唯一性定理得 $-s(-x)\equiv s(x)$，即 $s(-x)=-s(x)$，故 $s(x)$ 是奇函数。

(2) 证明 $s^2(x)+c^2(x)\equiv 1$

构造辅助函数 $E(x)=c^2(x)+s^2(x)$。对其求导，并代入前面证明的导数关系 $c'(x)=-s(x)$ 和 $s'(x)=c(x)$：

$$E'(x)=2c(x)c'(x)+2s(x)s'(x)=2c(x)(-s(x))+2s(x)c(x)=0$$

这说明 $E(x)$ 必须是一个常数。代入 $x=0$ 时的初始条件：

$$E(x)\equiv E(0)=c^2(0)+s^2(0)=1^2+0^2=1$$

故 $s^2(x)+c^2(x)\equiv 1$ 恒成立。

(3) 证明 $s(\alpha+\beta)=s(\alpha)c(\beta)+c(\alpha)s(\beta)$

将 β 视为常数，令 $f(\alpha)=s(\alpha+\beta)$。则 $f''(\alpha)+f(\alpha)=s''(\alpha+\beta)+s(\alpha+\beta)=0$。其初始条件为：$f(0)=s(\beta)$，$f'(0)=s'(\beta)=c(\beta)$。再令 $g(\alpha)=s(\alpha)c(\beta)+c(\alpha)s(\beta)$。则 $g''(\alpha)+g(\alpha)=(s''(\alpha)c(\beta)+c''(\alpha)s(\beta))+(s(\alpha)c(\beta)+c(\alpha)s(\beta))=0$。其初始条件为：

$$g(0)=s(0)c(\beta)+c(0)s(\beta)=0+1\cdot s(\beta)=s(\beta)$$

$$g'(0)=s'(0)c(\beta)+c'(0)s(\beta)=1\cdot c(\beta)+0=c(\beta)$$

由于 $f(\alpha)$ 与 $g(\alpha)$ 作为关于 α 的函数，满足相同的微分方程和初始条件，由解的唯一性定理得 $f(\alpha)\equiv g(\alpha)$。命题得证。

(4) 证明 $c(x)$ 和 $s(x)$ 均是以 4τ 为周期的

为了完成此证明，我们仿照 (3) 先证明 c 的加法公式 $c(\alpha+\beta)=c(\alpha)c(\beta)-s(\alpha)s(\beta)$。令 $F(\alpha)=c(\alpha+\beta)$，则 $F(0)=c(\beta)$，$F'(0)=c'(\beta)=-s(\beta)$。令 $G(\alpha)=c(\alpha)c(\beta)-s(\alpha)s(\beta)$，则 $G(0)=c(0)c(\beta)-0=c(\beta)$，$G'(0)=c'(0)c(\beta)-s'(0)s(\beta)=-s(\beta)$。两者均满足 $y''+y=0$，由唯一性定理得 $c(\alpha+\beta)=c(\alpha)c(\beta)-s(\alpha)s(\beta)$。

已知 τ 是 $c(x)$ 在 $x>0$ 上的第一个零点，即 $c(\tau)=0$。由 (2) 的结论 $s^2(\tau)+c^2(\tau)=1$ 可知 $s^2(\tau)=1$。因为 $c(0)=1>0$ 且 τ 是第一个正零点，所以当 $x\in(0,\tau)$ 时有 $c(x)>0$。又因 $s'(x)=c(x)>0$，说明 $s(x)$ 在 $[0,\tau]$ 上严格单调递增。结合 $s(0)=0$，必有 $s(\tau)>0$，故 $s(\tau)=1$。利用已证的两个加法公式，计算变量平移 τ 后的函数关系：

$$s(x+\tau)=s(x)c(\tau)+c(x)s(\tau)=s(x)\cdot 0+c(x)\cdot 1=c(x)$$
$$c(x+\tau)=c(x)c(\tau)-s(x)s(\tau)=c(x)\cdot 0-s(x)\cdot 1=-s(x)$$

进而计算平移 2τ 和 4τ 的关系：

$$s(x+2\tau)=s((x+\tau)+\tau)=c(x+\tau)=-s(x)$$
$$c(x+2\tau)=c((x+\tau)+\tau)=-s(x+\tau)=-c(x)$$

再次平移 2τ 得到 4τ 的关系：

$$s(x+4\tau)=-s(x+2\tau)=-(-s(x))=s(x)$$
$$c(x+4\tau)=-c(x+2\tau)=-(-c(x))=c(x)$$

这表明对于所有的 x，均有 $s(x+4\tau)=s(x)$ 且 $c(x+4\tau)=c(x)$。因此 $c(x)$ 和 $s(x)$ 均是以 4τ 为周期的函数。证明完毕。 $\square$