

北京大学数学学院

概率论期末往年题合集

试题部分与参考答案

Probability Theory Final Exam Collection

整理人: Lucian

联系作者: 947216434@qq.com

撰写日期: 2026 年 6 月 10 日

目录

1	2013 年期末考题	2
2	2013 年期末题解答部分	3
3	2017 年春期末考题	9
4	2017 年春期末题解答部分	10
5	2018 年春期末考题	17
6	2018 年春期末题解答部分	19
7	2019 年春期末考题	27
8	2019 年春期末题解答部分	28
9	2019 年秋期末考题	37
10	2019 年秋期末题解答部分	39
11	2020 年期末考题	45
12	2020 年期末题解答部分	46
13	2023 年秋期末考题	51
14	2023 年秋期末题解答部分	52
15	2024 年春期末考题	59
16	2024 年春期末题解答部分	60
17	2024 年秋期末考题	66
18	2024 年秋期末题解答部分	68
19	2025 年春期末考题	75
20	2025 年春期末题解答部分	77
21	2025 年秋期末考题	83
22	2025 年秋期末题解答部分	84

1 2013 年期末考题

出题人：任艳霞 教授

1. (10 分)

(1) X 是取非负整数值的随机变量, 且 $EX < \infty$ 。

证明:

$$EX = \sum_{i=1}^{\infty} P(X \geq i).$$

(2) X 与 Y 相互独立, 都是取非负整数值的随机变量, 且 $E(X+Y) < \infty$ 。

证明:

$$E(\max\{X, Y\}) = \sum_{i=0}^{\infty} [1 - P(X \leq i)P(Y \leq i)].$$

2. (10 分) X 与 Y 的联合概率密度函数如下:

$$f(x, y) = \frac{1}{y} e^{-x/y-y}, \quad 0 < x, y < \infty.$$

(1) 计算 $Y = y$ 条件下 X 的条件概率密度;

(2) 求 $P(X > 1 | Y = y)$, $y \in (0, \infty)$ 。

3. (15 分) X_1 与 X_2 是相互独立的随机变量, 且均满足标准正态分布。

令

$$Y_1 = \frac{X_1 + X_2}{2}, \quad Y_2 = \frac{(X_1 - X_2)^2}{4}.$$

(1) Y_1 与 Y_2 是否独立? 为什么?

(2) 求 Y_1, Y_2 的联合密度函数。

4. (10 分) 汽车的保险索赔额是随机变量, 服从指数分布。在有了扣除额 d (即 d 以下不赔付, d 以上则减去 d) 之后赔付额的期望减少了 10%, 问方差减少了百分之多少?

5. (10 分) 随机变量 $X_1, \dots, X_n$ 相互独立, 且均服从泊松分布。

证明:

$$X_1 + \dots + X_n$$

服从泊松分布。

6. (10 分) n 次重复独立试验, 结果为 $1, 2, \dots, k$, 概率分别为 $p_1, \dots, p_k$, 且

$$\sum_{i=1}^k p_i = 1.$$

令 N_i 表示出现 i 的次数, 对 $i \neq j$, 求

$$E(N_j | N_i > 0).$$

7. (10 分) $X_i (i = 1, 2, \dots, 12)$ 是独立同分布的随机变量, 且服从 $(0, 1)$ 间的均匀分布。

求

$$P\left(\sum_{i=1}^{12} X_i > 6\right)$$

的近似值。

8. (10 分) 随机变量 X_n 互相独立, 且 X_{2n} 服从参数为 λ 的泊松分布, X_{2n+1} 服从 $B(3, p)$ 。

记

$$S_n = \sum_{j=1}^n X_j,$$

求常数列 c_n, σ_n , 使得

$$\frac{S_{2n} - c_{2n}}{\sigma_{2n}}$$

依分布收敛到标准正态分布。

9. (15 分) 随机变量 $U_n, V_n, n \geq 1$, 且 U_n 依概率收敛到常数 c , V_n 依概率收敛到常数 d 。

证明:

$$U_n V_n$$

依概率收敛到 cd 。

2 2013 年期末题解答部分

1. (1) X 是取非负整数值的随机变量, 且 $EX < \infty$ 。

证明:

$$EX = \sum_{i=1}^{\infty} P(X \geq i).$$

解答

$$EX = \sum_{m=0}^{\infty} mP(X=m) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{i=1}^m P(X=m).$$

由于各项非负, 可以交换求和次序, 得

$$EX = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{m=i}^{\infty} P(X=m) = \sum_{i=1}^{\infty} P(X \geq i).$$

- (2) X 与 Y 相互独立, 都是取非负整数值的随机变量, 且 $E(X+Y) < \infty$ 。

证明:

$$E(\max\{X, Y\}) = \sum_{i=0}^{\infty} [1 - P(X \leq i)P(Y \leq i)].$$

解答 令

$$Z = \max\{X, Y\}.$$

则 Z 仍取非负整数, 且 $Z \leq X+Y$, 所以 $EZ < \infty$ 。

由第 (1) 问,

$$EZ = \sum_{m=1}^{\infty} P(Z \geq m) = \sum_{i=0}^{\infty} P(Z > i).$$

又

$$\{Z \leq i\} = \{X \leq i, Y \leq i\}.$$

由 X, Y 独立,

$$P(Z \leq i) = P(X \leq i)P(Y \leq i).$$

因此

$$E(\max\{X, Y\}) = \sum_{i=0}^{\infty} [1 - P(X \leq i)P(Y \leq i)].$$

2. X 与 Y 的联合概率密度函数如下:

$$f(x, y) = \frac{1}{y} e^{-x/y-y}, \quad 0 < x, y < \infty.$$

- (1) 计算 $Y=y$ 条件下 X 的条件概率密度;

- (2) 求 $P(X > 1 | Y=y)$, $y \in (0, \infty)$ 。

解答 先求 Y 的边缘密度:

$$f_Y(y) = \int_0^{\infty} f(x, y) dx = \int_0^{\infty} \frac{1}{y} e^{-x/y-y} dx = e^{-y}, \quad y > 0.$$

因此

$$f_{X|Y}(x | y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} = \frac{\frac{1}{y} e^{-x/y-y}}{e^{-y}} = \frac{1}{y} e^{-x/y}, \quad x > 0, y > 0.$$

于是

$$P(X > 1 | Y=y) = \int_1^{\infty} \frac{1}{y} e^{-x/y} dx = e^{-1/y}, \quad y > 0.$$

3. X_1 与 X_2 是相互独立的随机变量, 且均满足标准正态分布。

令

$$Y_1 = \frac{X_1 + X_2}{2}, \quad Y_2 = \frac{(X_1 - X_2)^2}{4}.$$

(1) Y_1 与 Y_2 是否独立? 为什么?

(2) 求 Y_1, Y_2 的联合密度函数。

解答 记

$$y_1 = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y_2 = \frac{(x_1 - x_2)^2}{4}.$$

$$\left| \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(y_1, y_2)} \right| = \left| \frac{\partial(y_1, y_2)}{\partial(x_1, x_2)} \right|^{-1} = \left| \begin{array}{cc} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{x_1 - x_2}{2} & -\frac{x_1 - x_2}{2} \end{array} \right|^{-1} = \frac{2}{|x_1 - x_2|} = \frac{1}{\sqrt{y_2}}.$$

又

$$f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}} = \frac{1}{2\pi} e^{-y_1^2 - y_2}.$$

因此当 $-\infty < y_1 < \infty, y_2 > 0$ 时, 由于同一组 (y_1, y_2) 对应两组 (x_1, x_2) , 故

$$\begin{aligned} f_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2) &= 2 \cdot f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) \cdot \left| \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(y_1, y_2)} \right| \\ &= \frac{1}{\pi\sqrt{y_2}} e^{-y_1^2 - y_2}. \end{aligned}$$

所以

$$f_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2) = \begin{cases} \frac{1}{\pi\sqrt{y_2}} e^{-y_1^2 - y_2}, & -\infty < y_1 < \infty, y_2 > 0, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

下面判断独立性。由联合密度可得

$$f_{Y_1}(y_1) = \int_0^\infty \frac{1}{\pi\sqrt{y_2}} e^{-y_1^2 - y_2} dy_2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-y_1^2}, \quad -\infty < y_1 < \infty.$$

以及

$$f_{Y_2}(y_2) = \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\pi\sqrt{y_2}} e^{-y_1^2 - y_2} dy_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi y_2}} e^{-y_2}, \quad y_2 > 0.$$

于是

$$f_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2) = f_{Y_1}(y_1) f_{Y_2}(y_2).$$

由独立性判据可知,

$$Y_1 \text{ 与 } Y_2 \text{ 相互独立.}$$

【注意:】

$$E(XY) = EXEY$$

等价于

$$\text{Cov}(X, Y) = 0,$$

只能说明 X, Y 不相关, 不能推出 X, Y 独立。

若要证明 X, Y 独立, 常用方法是证明联合分布可以分解为边缘分布的乘积。对于连续型随机变量, 即证明

$$f_{X, Y}(x, y) = f_X(x) f_Y(y).$$

对于离散型随机变量, 即证明

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y).$$

4. 汽车的保险索赔额是随机变量, 服从指数分布。在有了扣除额 d (即 d 以下不赔付, d 以上则减去 d) 之后赔付额的期望减少了 10%, 问方差减少了百分之多少?

解答 设原索赔额 $X \sim \text{Exp}(\lambda)$.

有扣除额后, 赔付额为

$$Y = \begin{cases} 0, & X \leq d, \\ X - d, & X > d. \end{cases}$$

由指数分布的无记忆性,

$$X - d \mid X > d \sim \text{Exp}(\lambda).$$

所以

$$EY = P(X > d)E(X - d | X > d) = e^{-\lambda d} \cdot \frac{1}{\lambda}.$$

由于 $EX = \frac{1}{\lambda}$ ，题意给出 $EY = 0.9EX$ ，故 $e^{-\lambda d} = 0.9$ 。

再算二阶矩：

$$E(Y^2) = P(X > d)E((X - d)^2 | X > d) = e^{-\lambda d} \cdot \frac{2}{\lambda^2}.$$

因此

$$\text{Var}(Y) = E(Y^2) - (EY)^2 = \frac{2e^{-\lambda d} - e^{-2\lambda d}}{\lambda^2}.$$

代入 $e^{-\lambda d} = 0.9$ ，得

$$\text{Var}(Y) = \frac{2 \times 0.9 - 0.9^2}{\lambda^2} = \frac{0.99}{\lambda^2}.$$

而 $\text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$ ，所以方差变为原来的 99%，故方差减少了

1%。

5. 随机变量 $X_1, \dots, X_n$ 相互独立，且均服从泊松分布。

证明：

$$X_1 + \dots + X_n$$

服从泊松分布。

解答 设

$$X_i \sim P(\lambda_i), \quad i = 1, \dots, n.$$

先证两个泊松随机变量之和仍为泊松分布。若

$$X \sim P(\lambda), \quad Y \sim P(\mu),$$

且 X, Y 相互独立，则对 $k = 0, 1, 2, \dots$,

$$\begin{aligned} P(X + Y = k) &= \sum_{j=0}^k P(X = j, Y = k - j) \\ &= \sum_{j=0}^k P(X = j)P(Y = k - j) \\ &= \sum_{j=0}^k e^{-\lambda} \frac{\lambda^j}{j!} e^{-\mu} \frac{\mu^{k-j}}{(k-j)!} \\ &= e^{-(\lambda+\mu)} \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \lambda^j \mu^{k-j} \\ &= e^{-(\lambda+\mu)} \frac{(\lambda + \mu)^k}{k!}. \end{aligned}$$

所以

$$X + Y \sim P(\lambda + \mu).$$

由归纳法可得

$$X_1 + \dots + X_n \sim P(\lambda_1 + \dots + \lambda_n).$$

特别地，若

$$X_1, \dots, X_n \sim P(\lambda),$$

则

$$X_1 + \dots + X_n \sim P(n\lambda).$$

【另解】

解答 设

$$X_i \sim P(\lambda_i), \quad i = 1, \dots, n.$$

泊松分布的特征函数为

$$\varphi_{X_i}(t) = E(e^{itX_i}) = \exp\{\lambda_i(e^{it} - 1)\}.$$

由于 $X_1, \dots, X_n$ 相互独立, 所以

$$\begin{aligned} \varphi_{X_1+\dots+X_n}(t) &= \prod_{i=1}^n \varphi_{X_i}(t) \\ &= \prod_{i=1}^n \exp\{\lambda_i(e^{it} - 1)\} \\ &= \exp\{(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)(e^{it} - 1)\}. \end{aligned}$$

这正是参数为 $\lambda_1 + \dots + \lambda_n$ 的泊松分布的特征函数, 因此

$$X_1 + \dots + X_n \sim P(\lambda_1 + \dots + \lambda_n).$$

6. n 次重复独立试验, 结果为 $1, 2, \dots, k$, 概率分别为 $p_1, \dots, p_k$, 且

$$\sum_{i=1}^k p_i = 1.$$

令 N_i 表示出现 i 的次数, 对 $i \neq j$, 求

$$E(N_j \mid N_i > 0).$$

解答 由全期望公式,

$$EN_j = E(N_j \mid N_i > 0)P(N_i > 0) + E(N_j \mid N_i = 0)P(N_i = 0).$$

其中

$$EN_j = np_j, \quad P(N_i = 0) = (1 - p_i)^n, \quad P(N_i > 0) = 1 - (1 - p_i)^n.$$

当 $N_i = 0$ 时, 每次试验都没有出现 i , 于是结果为 j 的条件概率为

$$P(\text{结果为 } j \mid \text{结果不是 } i) = \frac{p_j}{1 - p_i}.$$

因此

$$N_j \mid N_i = 0 \sim B\left(n, \frac{p_j}{1 - p_i}\right),$$

所以

$$E(N_j \mid N_i = 0) = n \frac{p_j}{1 - p_i}.$$

代入全期望公式, 得

$$np_j = E(N_j \mid N_i > 0)[1 - (1 - p_i)^n] + n \frac{p_j}{1 - p_i}(1 - p_i)^n.$$

即

$$np_j = E(N_j \mid N_i > 0)[1 - (1 - p_i)^n] + np_j(1 - p_i)^{n-1}.$$

所以

$$E(N_j \mid N_i > 0) = \frac{np_j [1 - (1 - p_i)^{n-1}]}{1 - (1 - p_i)^n}.$$

7. X_i ($i = 1, 2, \dots, 12$) 是独立同分布的随机变量, 且服从 $(0, 1)$ 间的均匀分布。

求

$$P\left(\sum_{i=1}^{12} X_i > 6\right)$$

的近似值。

解答 记

$$S = \sum_{i=1}^{12} X_i, \quad EX_i = \frac{1}{2}, \quad \text{Var}(X_i) = \frac{1}{12}.$$

由中心极限定理,

$$\frac{S - 6}{1} \approx N(0, 1).$$

因此

$$P(S > 6) = P\left(\frac{S - 6}{1} > 0\right) \approx P(Z > 0) = \frac{1}{2}.$$

所以

$$P\left(\sum_{i=1}^{12} X_i > 6\right) \approx 0.5.$$

【注:】

事实上, 由于 X_i 与 $1 - X_i$ 同分布, S 关于 6 对称, 且 S 为连续型随机变量, 所以该概率也正好等于 $\frac{1}{2}$ 。

8. 随机变量 X_n 互相独立, 且 X_{2n} 服从参数为 λ 的泊松分布, X_{2n+1} 服从 $B(3, p)$ 。

记

$$S_n = \sum_{j=1}^n X_j,$$

求常数列 c_n, σ_n , 使得

$$\frac{S_{2n} - c_{2n}}{\sigma_{2n}}$$

依分布收敛到标准正态分布。

解答 因为

$$X_{2m} \sim P(\lambda), \quad X_{2m-1} \sim B(3, p),$$

所以

$$\begin{aligned} EX_{2m} &= \lambda, & \text{Var}(X_{2m}) &= \lambda, \\ EX_{2m-1} &= 3p, & \text{Var}(X_{2m-1}) &= 3p(1-p). \end{aligned}$$

又因为各 X_i 相互独立, 所以

$$\begin{aligned} ES_{2n} &= n\lambda + 3np = n(\lambda + 3p), \\ \text{Var}(S_{2n}) &= n\lambda + 3np(1-p) = n(\lambda + 3p(1-p)). \end{aligned}$$

令

$$c_{2n} = n(\lambda + 3p), \quad \sigma_{2n} = \sqrt{n(\lambda + 3p(1-p))}.$$

则由中心极限定理,

$$\frac{S_{2n} - c_{2n}}{\sigma_{2n}} = \frac{S_{2n} - n(\lambda + 3p)}{\sqrt{n(\lambda + 3p(1-p))}} \xrightarrow{d} N(0, 1).$$

因此可取

$$c_{2n} = n(\lambda + 3p), \quad \sigma_{2n} = \sqrt{n(\lambda + 3p(1-p))}.$$

9. 随机变量 $U_n, V_n, n \geq 1$, 且 U_n 依概率收敛到常数 c , V_n 依概率收敛到常数 d 。

证明:

$$U_n V_n$$

依概率收敛到 cd 。

解答 对任意 $\varepsilon > 0$, 有

$$|U_n V_n - cd| = |U_n(V_n - d) + d(U_n - c)| \leq |U_n||V_n - d| + |d||U_n - c|.$$

因此

$$P(|U_n V_n - cd| > \varepsilon) \leq P\left(|U_n||V_n - d| > \frac{\varepsilon}{2}\right) + P\left(|d||U_n - c| > \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

因为 $U_n \xrightarrow{P} c$, 所以 U_n 依概率有界。取常数 $M > |c| + 1$, 则

$$P(|U_n| > M) \rightarrow 0.$$

于是

$$\begin{aligned} P\left(|U_n||V_n - d| > \frac{\varepsilon}{2}\right) &\leq P(|U_n| > M) + P\left(M|V_n - d| > \frac{\varepsilon}{2}\right) \\ &= P(|U_n| > M) + P\left(|V_n - d| > \frac{\varepsilon}{2M}\right) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

又因为 $U_n \xrightarrow{P} c$, 所以当 $d \neq 0$ 时,

$$P\left(|d||U_n - c| > \frac{\varepsilon}{2}\right) = P\left(|U_n - c| > \frac{\varepsilon}{2|d|}\right) \rightarrow 0.$$

若 $d = 0$, 则这一项恒为 0, 结论仍成立。

综上,

$$P(|U_n V_n - cd| > \varepsilon) \rightarrow 0.$$

因此

$$U_n V_n \xrightarrow{P} cd.$$

3 2017 年春季期末考题

June 22, 2017

- (10 分) 设某药物的有效率为 80%，随机对 n 个人使用药物，给出药物有效比例不小于 85% 的概率的近似公式（用正态分布函数表示）。
- (10 分) 设相互独立的随机变量列 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足

$$P(X_n = -n) = P(X_n = n) = \frac{1}{2n \log n}, \quad P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n \log n}.$$

证明

$$\frac{1}{n} \sum_{i=2}^n X_i$$

依概率收敛到 0，但不是几乎处处收敛到 0。

- (10 分) 设汽车保险索赔额是服从指数分布的随机变量，若存在扣除额 d (d 以下不赔付， d 以上扣除 d) 后赔付款的期望减少了 10%，问方差减少了百分之多少？
- (15 分) 设 (X, Y) 有联合密度

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)} (x^2 - 2\rho xy + y^2) \right\}.$$

令

$$Z = \frac{Y - \rho X}{\sqrt{1-\rho^2}}.$$

- (1) 证明 X, Z 独立且均服从 $N(0, 1)$ 分布；
 - (2) 求 $(|X|, |Z|)$ 的密度函数；
 - (3) 求 $P(X \geq 0, Y \geq 0)$ 。
- (15 分) 设 (X, Y) 有联合密度

$$f(x, y) = \begin{cases} c, & 0 \leq x < y \leq 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

- (1) 求常数 c ；
 - (2) 求条件 $X = x, x \in (0, 1)$ 下 Y 的条件密度函数；
 - (3) 求 $P(X + Y \leq 1)$ 。
- (8 分) 设一枚硬币正面朝上的概率为 p ，记 X_n 为出现连续 n 次正面时掷硬币的次数，求 EX_n 。
 - (8 分) 设 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ 独立同分布且与 X 同分布，且存在实数 $b > 0$ 使得 $Ee^{bX} < \infty$ ，证明对任意实数 a 有

$$P \left(\sum_{i=1}^n X_i \geq na \right) \leq e^{-nh(a)},$$

其中

$$h(x) = \sup_{0 \leq \theta < b} \{ \theta x - \log Ee^{\theta X} \}.$$

- (10 分) 现有股票价格模型如下：假设当前时间的股票价格为 s ，则一个单位时间后股票的价格以概率 p 上涨为 us ，以概率 $1-p$ 下降为 ds ，记 W_n 为 n 个单位时间后的股票价格。
 - (1) 证明存在常数 c ，使得 $\frac{1}{n} \log W_n$ 几乎处处收敛到 c ，这里 $\log$ 为以 10 为底的对数；
 - (2) 给定 $u = 1.012, d = 0.990, p = 0.4$ ，给出 600 天后股票价格上涨至少 30% 的概率近似值（用正态分布函数表示）。
- (14 分) 称随机变量 X 是对称分布的，若

$$P(X \leq -x) = P(X \geq x), \quad \forall x \geq 0.$$

- (1) 证明 X 是对称分布的充要条件是 X 的特征函数 $\phi(t)$ 是实值函数；
- (2) 假设存在某个对称分布的随机变量的特征函数为

$$\phi(t) = e^{-\sqrt{|t|}},$$

设 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ 独立同分布，

$$S_n = \sum_{k=1}^n X_k,$$

求实数列 a_n ，使得 S_n/a_n 依分布收敛到一个非常值的随机变量，并给出极限分布。

4 2017 年春季期末题解答部分

1. (10 分) 设某药物的有效率为 80%，随机对 n 个人使用药物，给出药物有效比例不小于 85% 的概率的近似公式（用正态分布函数表示）。

解答 设 X 表示 n 个人中药物有效的人数，则

$$X \sim B(n, 0.8).$$

所求概率为

$$P\left(\frac{X}{n} \geq 0.85\right).$$

由中心极限定理，

$$\frac{X - 0.8n}{\sqrt{n \cdot 0.8 \cdot 0.2}} = \frac{X - 0.8n}{0.4\sqrt{n}} \xrightarrow{d} N(0, 1).$$

因此

$$\begin{aligned} P\left(\frac{X}{n} \geq 0.85\right) &= P(X \geq 0.85n) \\ &= P\left(\frac{X - 0.8n}{0.4\sqrt{n}} \geq \frac{0.85n - 0.8n}{0.4\sqrt{n}}\right) \\ &\approx 1 - \Phi\left(\frac{0.05n}{0.4\sqrt{n}}\right) \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{8}\right), \end{aligned}$$

其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数。

2. (10 分) 设相互独立的随机变量列 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足

$$P(X_n = -n) = P(X_n = n) = \frac{1}{2n \log n}, \quad P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n \log n}.$$

证明

$$\frac{1}{n} \sum_{i=2}^n X_i$$

依概率收敛到 0，但不是几乎处处收敛到 0。

解答 记

$$S_n = \sum_{i=2}^n X_i.$$

因为

$$EX_i = 0, \quad \text{Var}(X_i) = EX_i^2 = i^2 \cdot \frac{1}{i \log i} = \frac{i}{\log i},$$

所以

$$\text{Var}\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=2}^n \text{Var}(X_i) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=2}^n \frac{i}{\log i} \leq \frac{1}{\log n} \rightarrow 0.$$

上式最后一步是由于 $n/\ln n$ 在 n 足够大的时候递增。

由 Chebyshev 不等式，

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} 0.$$

另一方面，

$$P\left(\left|\frac{X_n}{n}\right| > \varepsilon\right) = \frac{1}{n \log n}, \quad 0 < \varepsilon < 1.$$

因为

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n} = \infty,$$

由 Borel-Cantelli 引理， $P(|\frac{X_n}{n}| > \varepsilon \text{ i.o.}) = 1$ ，即

$$\frac{X_n}{n} \not\rightarrow 0 \quad a.s.$$

若

$$\frac{S_n}{n} \rightarrow 0 \quad a.s.,$$

则

$$\frac{X_n}{n} = \frac{S_n}{n} - \frac{n-1}{n} \cdot \frac{S_{n-1}}{n-1} \rightarrow 0 \quad a.s.,$$

矛盾。

因此 $\frac{1}{n} \sum_{i=2}^n X_i$ 不是几乎处处收敛到 0。

【注：】

注：本题用到的结论

(1) Chebyshev 不等式：

$$P(|X - EX| \geq \varepsilon) \leq \frac{\text{Var}(X)}{\varepsilon^2}.$$

因此若 $ES_n = 0$ ，且 $\text{Var}(S_n) \rightarrow 0$ ，则

$$S_n \xrightarrow{P} 0.$$

(2) Borel–Cantelli 引理：

若事件列 A_n 相互独立，且

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty,$$

则

$$P(A_n \text{ i.o.}) = 1.$$

其中 $A_n \text{ i.o.}$ 表示 A_n 发生无穷多次。

本题中取

$$A_n = \left\{ \left| \frac{X_n}{n} \right| > \varepsilon \right\}, \quad 0 < \varepsilon < 1.$$

由于 X_n 只取 $-n, 0, n$ ，所以

$$A_n = \{X_n = \pm n\}.$$

因而

$$P(A_n) = P(X_n = -n) + P(X_n = n) = \frac{1}{n \log n}.$$

又

$$\sum_{n=2}^{\infty} P(A_n) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n} = \infty.$$

由 Borel–Cantelli 引理，

$$P(A_n \text{ i.o.}) = 1.$$

即

$$P\left(\left|\frac{X_n}{n}\right| > \varepsilon \text{ i.o.}\right) = 1.$$

所以

$$\frac{X_n}{n} \not\rightarrow 0 \quad a.s.$$

(3) 若

$$\frac{S_n}{n} \rightarrow 0,$$

则

$$\frac{S_{n-1}}{n} \rightarrow 0,$$

因而

$$\frac{X_n}{n} = \frac{S_n}{n} - \frac{S_{n-1}}{n} \rightarrow 0.$$

3. (10 分) 汽车的保险索赔额是随机变量, 服从指数分布. 在有了扣除额 d (即 d 以下不赔付, d 以上则减去 d) 之后赔付额的期望减少了 10%, 问方差减少了百分之多少?

解答 设原索赔额 $X \sim \text{Exp}(\lambda)$.

有扣除额后, 赔付额为

$$Y = \begin{cases} 0, & X \leq d, \\ X - d, & X > d. \end{cases}$$

由指数分布的无记忆性,

$$X - d \mid X > d \sim \text{Exp}(\lambda).$$

所以

$$EY = P(X > d)E(X - d \mid X > d) = e^{-\lambda d} \cdot \frac{1}{\lambda}.$$

由于 $EX = \frac{1}{\lambda}$, 题意给出 $EY = 0.9EX$, 故 $e^{-\lambda d} = 0.9$.

再算二阶矩:

$$E(Y^2) = P(X > d)E((X - d)^2 \mid X > d) = e^{-\lambda d} \cdot \frac{2}{\lambda^2}.$$

因此

$$\text{Var}(Y) = E(Y^2) - (EY)^2 = \frac{2e^{-\lambda d} - e^{-2\lambda d}}{\lambda^2}.$$

代入 $e^{-\lambda d} = 0.9$, 得

$$\text{Var}(Y) = \frac{2 \times 0.9 - 0.9^2}{\lambda^2} = \frac{0.99}{\lambda^2}.$$

而 $\text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$, 所以方差变为原来的 99%, 故方差减少了

1%.

4. (15 分) 设 (X, Y) 有联合密度

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)} (x^2 - 2\rho xy + y^2) \right\}.$$

令

$$Z = \frac{Y - \rho X}{\sqrt{1-\rho^2}}.$$

(1) 证明 X, Z 独立且均服从 $N(0, 1)$ 分布;

(2) 求 $(|X|, |Z|)$ 的密度函数;

(3) 求 $P(X \geq 0, Y \geq 0)$.

解答

(1) 由

$$y = \rho x + \sqrt{1-\rho^2} z, \quad \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(x, z)} \right| = \sqrt{1-\rho^2},$$

得

$$\begin{aligned} f_{X,Z}(x, z) &= f_{X,Y}(x, \rho x + \sqrt{1-\rho^2} z) \sqrt{1-\rho^2} \\ &= \frac{1}{2\pi} \exp \left\{ -\frac{x^2 + z^2}{2} \right\}. \end{aligned}$$

因而

$$f_{X,Z}(x, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2},$$

所以 X, Z 独立, 且均服从 $N(0, 1)$.

(2) 设

$$U = |X|, \quad V = |Z|.$$

当 $u \geq 0, v \geq 0$ 时,

$$\begin{aligned} f_{U,V}(u, v) &= f_{X,Z}(u, v) + f_{X,Z}(-u, v) + f_{X,Z}(u, -v) + f_{X,Z}(-u, -v) \\ &= \frac{2}{\pi} e^{-(u^2+v^2)/2}. \end{aligned}$$

因此

$$f_{|X|,|Z|}(u, v) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} e^{-(u^2+v^2)/2}, & u \geq 0, v \geq 0, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

(3) 因为

$$Y = \rho X + \sqrt{1 - \rho^2} Z,$$

所以

$$P(X \geq 0, Y \geq 0) = P\left(X \geq 0, Z \geq -\frac{\rho}{\sqrt{1 - \rho^2}} X\right).$$

令

$$D = \left\{ (x, z) : x \geq 0, z \geq -\frac{\rho}{\sqrt{1 - \rho^2}} x \right\}.$$

作极坐标变换

$$x = r \cos \theta, \quad z = r \sin \theta.$$

令

$$\alpha = \arccos \rho.$$

则

$$-\frac{\rho}{\sqrt{1 - \rho^2}} = -\cot \alpha.$$

区域 D 对应的角度范围为

$$D_\theta = \left[-\frac{\pi}{2} + \alpha, \frac{\pi}{2} \right],$$

因此

$$\begin{aligned} P(X \geq 0, Y \geq 0) &= \int_{-\frac{\pi}{2} + \alpha}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty \frac{1}{2\pi} e^{-r^2/2} r \, dr \, d\theta \\ &= \frac{\pi - \alpha}{2\pi} = \frac{\pi - \arccos \rho}{2\pi}. \end{aligned}$$

所以

$$P(X \geq 0, Y \geq 0) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\arccos \rho}{\pi} \right).$$

5. (15 分) 设 (X, Y) 有联合密度

$$f(x, y) = \begin{cases} c, & 0 \leq x < y \leq 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

(1) 求常数 c ;

(2) 求条件 $X = x, x \in (0, 1)$ 下 Y 的条件密度函数;

(3) 求 $P(X + Y \leq 1)$ 。

解答

(1) 由密度积分为 1,

$$\int_0^1 \int_x^1 c \, dy \, dx = 1.$$

即

$$c \int_0^1 (1 - x) \, dx = 1,$$

所以

$$c \cdot \frac{1}{2} = 1, \quad c = 2.$$

(2) 先求 X 的边缘密度:

$$f_X(x) = \int_x^1 2 \, dy = 2(1 - x), \quad 0 < x < 1.$$

因此

$$f_{Y|X=x}(y) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)} = \frac{1}{1 - x}, \quad x < y < 1.$$

即

$$f_{Y|X=x}(y) = \begin{cases} \frac{1}{1 - x}, & x < y < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

(3) 由题意, 积分区域为

$$0 \leq x < y, \quad x + y \leq 1.$$

所以 $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$, 且

$$x \leq y \leq 1 - x.$$

因此

$$\begin{aligned} P(X + Y \leq 1) &= \int_0^{1/2} \int_x^{1-x} 2 \, dy \, dx \\ &= \int_0^{1/2} 2(1 - 2x) \, dx \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

6. (8 分) 设一枚硬币正面朝上的概率为 p , 记 X_n 为出现连续 n 次正面时掷硬币的次数, 求 EX_n 。

解答 设 E_k 表示当前已有连续 k 次正面时, 还需掷硬币的期望次数, $k = 0, 1, \dots, n$ 。显然

$$E_n = 0.$$

对 $0 \leq k < n$, 有

$$E_k = 1 + pE_{k+1} + (1-p)E_0.$$

由 $k = 0$ 得

$$E_0 = 1 + pE_1 + (1-p)E_0,$$

即

$$E_0 - E_1 = \frac{1}{p}.$$

又由递推式相减可得

$$E_k - E_{k+1} = p(E_{k+1} - E_{k+2}),$$

因此

$$E_k - E_{k+1} = \frac{1}{p^{k+1}}.$$

所以

$$\begin{aligned} EX_n = E_0 &= E_0 - E_n \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (E_k - E_{k+1}) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{p^{k+1}} \\ &= \frac{1 - p^n}{(1-p)p^n}. \end{aligned}$$

因此

$$\boxed{EX_n = \frac{1 - p^n}{(1-p)p^n}}.$$

7. (8 分) 设 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ 独立同分布且与 X 同分布, 且存在实数 $b > 0$ 使得 $Ee^{bX} < \infty$, 证明对任意实数 a 有

$$P\left(\sum_{i=1}^n X_i \geq na\right) \leq e^{-nh(a)},$$

其中

$$h(x) = \sup_{0 \leq \theta < b} \{\theta x - \log Ee^{\theta X}\}.$$

解答 记

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i.$$

对任意 $0 \leq \theta < b$, 由 Markov 不等式,

$$\begin{aligned} P(S_n \geq na) &= P(e^{\theta S_n} \geq e^{\theta na}) \\ &\leq e^{-\theta na} Ee^{\theta S_n}. \end{aligned}$$

由独立同分布,

$$Ee^{\theta S_n} = \prod_{i=1}^n Ee^{\theta X_i} = (Ee^{\theta X})^n.$$

因此

$$P(S_n \geq na) \leq \exp \{ -n (\theta a - \log Ee^{\theta X}) \}.$$

对 $0 \leq \theta < b$ 取上确界, 得

$$P(S_n \geq na) \leq \exp \left\{ -n \sup_{0 \leq \theta < b} (\theta a - \log Ee^{\theta X}) \right\}.$$

即

$$P \left(\sum_{i=1}^n X_i \geq na \right) \leq e^{-nh(a)}.$$

8. (10 分) 现有股票价格模型如下: 假设当前时间的股票价格为 s , 则一个单位时间后股票的价格以概率 p 上涨为 us , 以概率 $1-p$ 下降为 ds , 记 W_n 为 n 个单位时间后的股票价格。

(1) 证明存在常数 c , 使得 $\frac{1}{n} \log W_n$ 几乎处处收敛到 c , 这里 $\log$ 为以 10 为底的对数;

(2) 给定 $u = 1.012$, $d = 0.990$, $p = 0.4$, 给出 600 天后股票价格上涨至少 30% 的概率近似值 (用正态分布函数表示)。

解答

(1) 设 N_n 为 n 天中上涨的天数, 则

$$N_n \sim B(n, p), \quad W_n = su^{N_n} d^{n-N_n}.$$

因此

$$\frac{1}{n} \log W_n = \frac{1}{n} \log s + \frac{N_n}{n} \log u + \left(1 - \frac{N_n}{n} \right) \log d.$$

由强大数定律,

$$\frac{N_n}{n} \rightarrow p \quad a.s.$$

所以

$$\frac{1}{n} \log W_n \rightarrow p \log u + (1-p) \log d \quad a.s.$$

即

$$c = p \log u + (1-p) \log d.$$

(2) 设 N 为 600 天中上涨的天数, 则

$$N \sim B(600, 0.4), \quad W_{600} = su^N d^{600-N}.$$

因此

$$\log \frac{W_{600}}{s} = 600 \log d + N \log \frac{u}{d}.$$

所以

$$P(W_{600} \geq 1.3s) = P \left(N \geq \frac{\log 1.3 - 600 \log 0.990}{\log 1.012 - \log 0.990} \right).$$

由中心极限定理,

$$\frac{N - 600p}{\sqrt{600p(1-p)}} = \frac{N - 240}{12} \approx N(0, 1).$$

因此

$$\begin{aligned} P(W_{600} \geq 1.3s) &\approx 1 - \Phi \left(\frac{\frac{\log 1.3 - 600 \log 0.990}{\log 1.012 - \log 0.990} - 240}{12} \right) \\ &\approx 1 - \Phi(3.858). \end{aligned}$$

9. (14 分) 称随机变量 X 是对称分布的, 若

$$P(X \leq -x) = P(X \geq x), \quad \forall x \geq 0.$$

(1) 证明 X 是对称分布的充要条件是 X 的特征函数 $\phi(t)$ 是实值函数;

(2) 假设存在某个对称分布的随机变量的特征函数为

$$\phi(t) = e^{-\sqrt{|t|}},$$

设 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ 独立同分布,

$$S_n = \sum_{k=1}^n X_k,$$

求实数列 a_n , 使得 S_n/a_n 依分布收敛到一个非常值的随机变量, 并给出极限分布。

解答

(1) 若 X 对称分布, 则

$$X \stackrel{d}{=} -X.$$

因此

$$\phi(t) = Ee^{itX} = Ee^{-itX} = \phi(-t).$$

又

$$\phi(-t) = \overline{\phi(t)},$$

所以

$$\phi(t) = \overline{\phi(t)}.$$

故 $\phi(t)$ 为实值函数。

反之, 若 $\phi(t)$ 为实值函数, 则

$$\phi(t) = \overline{\phi(t)} = \phi(-t).$$

而 $\phi(-t)$ 是 $-X$ 的特征函数, 所以 X 与 $-X$ 特征函数相同, 故

$$X \stackrel{d}{=} -X.$$

因此 X 是对称分布。

(2) 设 $\frac{S_n}{a_n}$ 的特征函数为 $\phi_n(t)$, 则

$$\begin{aligned} \phi_n(t) &= E \exp \left\{ it \frac{S_n}{a_n} \right\} \\ &= \left[\phi \left(\frac{t}{a_n} \right) \right]^n \\ &= \left[\exp \left\{ -\sqrt{\left| \frac{t}{a_n} \right|} \right\} \right]^n \\ &= \exp \left\{ -\frac{n}{\sqrt{a_n}} \sqrt{|t|} \right\}. \end{aligned}$$

为使其收敛到一个非常值随机变量的特征函数, 应有

$$\frac{n}{\sqrt{a_n}} \rightarrow c, \quad 0 < c < \infty.$$

取

$$a_n = n^2.$$

此时

$$\phi_n(t) = \exp \{ -\sqrt{|t|} \}.$$

由特征函数连续性定理 (特征函数逐点收敛可推出随机变量依分布收敛),

$$\frac{S_n}{n^2} \xrightarrow{d} Y,$$

其中 Y 的特征函数为

$$\phi_Y(t) = e^{-\sqrt{|t|}}.$$

因此可取

$$\boxed{a_n = n^2},$$

极限分布就是特征函数为

$$\boxed{\phi_Y(t) = e^{-\sqrt{|t|}}}$$

的分布。

5 2018 年春季期末考题

命题：任艳霞

- (10 分) 设某药物的有效率为 80%，随机对 n 个人使用药物，给出药物有效比例不小于 85% 的概率近似公式（用正态分布函数表示）。
- (10 分) 设 X 是离散型随机变量， Y 是连续型随机变量，且对随机变量 X 满足

$$P\{X = x_i\} = p_i, \quad i = 1, 2, \dots,$$

并且随机变量 Y 有密度函数 $f(y)$ ，且 X 和 Y 独立。问： $X + Y$ 是不是连续型随机变量，如果是，请求出其密度函数；若不是，请给出理由。

- (10 分) 设汽车保险索赔额是服从指数分布的随机变量。若在有扣除额 d (d 以下不赔付， d 以上扣除 d) 后赔付款的期望减少了 10%，问方差减少了百分之多少？
- (15 分) 设 (X, Y) 是联合密度

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x^2 - 2\rho xy + y^2)\right\}.$$

令

$$Z = \frac{Y - \rho X}{\sqrt{1-\rho^2}}.$$

- (1) 证明 X, Z 独立且服从 $N(0, 1)$ 分布；
- (2) 求 $(|X|, |Z|)$ 的密度函数；
- (3) 求 $P(X \geq 0, Y \geq 0)$.
- (10 分) 假设一只蚕产的卵的个数 ξ 服从参数为 λ 的泊松分布，而每个卵能成虫的概率为 p ，且每个卵之间成虫是相互独立的，并设一只蚕产的卵的成虫数为随机变量 η ，问
 - (1) 求 η 的数学期望；
 - (2) 求 $E(\xi | \eta)$.
- (15 分) 设相互独立的随机变量列 $\{X_n\}_{n=2}^{\infty}$ 满足

$$P(X_n = -n) = P(X_n = n) = \frac{1}{2n \log n}, \quad P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n \log n}.$$

- (1) 证明 $\frac{1}{n} \sum_{i=2}^n X_i$ 以 L^2 收敛（均方收敛）到 0；
- (2) 证明 $\frac{1}{n} \sum_{i=2}^n X_i$ 依概率收敛到 0；
- (3) 证明 $\frac{1}{n} \sum_{i=2}^n X_i$ 不几乎处处收敛到 0.
- (10 分) 现有股票价格模型如下：假设当前时间的股票价格为 s ，则一个单位时间后股票的价格以概率 p 上涨为 us ，以概率 $1-p$ 下跌为 ds 。记 W_n 为 n 个单位时间后的股票价格。
 - (1) 请自己构造随机变量，并用其来表示 W_n ；
 - (2) 证明存在常数 c ，使得 $\frac{1}{n} \log W_n$ 几乎处处收敛到 c ，这里 $\log$ 是以 10 为底的对数；
 - (3) 给定 $u = 1.012$, $d = 0.990$, $p = 0.4$ ，请给出 600 天后股票价格上涨至少 30% 的概率近似公式（用正态分布函数表示）。

$$\log 1.012 = 0.005, \quad \log 0.990 = -0.004, \quad \log 1.3 = 0.114.$$

- (20 分) 称随机变量是对称分布的，若

$$P(X < -x) = P(X > x), \quad \forall x \geq 0.$$

- (1) 证明 X 是对称分布的充要条件是 X 和 $-X$ 同分布；
- (2) 证明 X 是对称分布的充要条件是 X 的特征函数 $\varphi(t)$ 是实值偶函数；
- (3) 假设存在某个对称分布的随机变量 X 的特征函数为

$$\varphi(t) = e^{-\sqrt{|t|}},$$

证明 $E(X^2) = \infty$ ；

- (4) 设随机变量序列 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ 独立同分布，且特征函数为 $\varphi(t)$ ，

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i,$$

求实数列 $\{a_n\}$ ，使得 $\frac{S_n}{a_n}$ 依分布收敛到一个非常值的随机变量，并给出极限分布。

6 2018 年春季期末题解答部分

1. (10 分) 设某药物的有效率为 80%，随机对 n 个人使用药物，给出药物有效比例不小于 85% 的概率的近似公式（用正态分布函数表示）。

解答 设 X 表示 n 个人中药物有效的人数，则

$$X \sim B(n, 0.8).$$

所求概率为

$$P\left(\frac{X}{n} \geq 0.85\right).$$

由中心极限定理，

$$\frac{X - 0.8n}{\sqrt{n \cdot 0.8 \cdot 0.2}} = \frac{X - 0.8n}{0.4\sqrt{n}} \xrightarrow{d} N(0, 1).$$

因此

$$\begin{aligned} P\left(\frac{X}{n} \geq 0.85\right) &= P(X \geq 0.85n) \\ &= P\left(\frac{X - 0.8n}{0.4\sqrt{n}} \geq \frac{0.85n - 0.8n}{0.4\sqrt{n}}\right) \\ &\approx 1 - \Phi\left(\frac{0.05n}{0.4\sqrt{n}}\right) \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{8}\right), \end{aligned}$$

其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数。

2. (10 分) 设 X 是离散型随机变量， Y 是连续型随机变量，且对随机变量 X 满足

$$P\{X = x_i\} = p_i, \quad i = 1, 2, \dots,$$

并且随机变量 Y 有密度函数 $f(y)$ ，且 X 和 Y 独立。问： $X + Y$ 是不是连续型随机变量，如果是，请求出其密度函数；若不是，请给出理由。

解答 $X + Y$ 是连续型随机变量。

设 $Z = X + Y$ 。对任意实数 z ，有

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P(X + Y \leq z) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} P(X = x_i, Y \leq z - x_i) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} P(X = x_i)P(Y \leq z - x_i) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} p_i \int_{-\infty}^{z-x_i} f(y) dy. \end{aligned}$$

令 $u = y + x_i$ ，则

$$\int_{-\infty}^{z-x_i} f(y) dy = \int_{-\infty}^z f(u - x_i) du.$$

因此

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^z \sum_{i=1}^{\infty} p_i f(u - x_i) du.$$

所以 $Z = X + Y$ 的密度函数为

$$g(z) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i f(z - x_i).$$

故 $X + Y$ 为连续型随机变量。

3. (10 分) 汽车的保险索赔额是随机变量，服从指数分布。在有了扣除额 d （即 d 以下不赔付， d 以上则减去 d ）之后赔付额的期望减少了 10%，问方差减少了百分之多少？

解答 设原索赔额 $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ 。

有扣除额后，赔付额为

$$Y = \begin{cases} 0, & X \leq d, \\ X - d, & X > d. \end{cases}$$

由指数分布的无记忆性，

$$X - d \mid X > d \sim \text{Exp}(\lambda).$$

所以

$$EY = P(X > d)E(X - d \mid X > d) = e^{-\lambda d} \cdot \frac{1}{\lambda}.$$

由于 $EX = \frac{1}{\lambda}$ ，题意给出 $EY = 0.9EX$ ，故 $e^{-\lambda d} = 0.9$ 。

再算二阶矩：

$$E(Y^2) = P(X > d)E((X - d)^2 \mid X > d) = e^{-\lambda d} \cdot \frac{2}{\lambda^2}.$$

因此

$$\text{Var}(Y) = E(Y^2) - (EY)^2 = \frac{2e^{-\lambda d} - e^{-2\lambda d}}{\lambda^2}.$$

代入 $e^{-\lambda d} = 0.9$ ，得

$$\text{Var}(Y) = \frac{2 \times 0.9 - 0.9^2}{\lambda^2} = \frac{0.99}{\lambda^2}.$$

而 $\text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$ ，所以方差变为原来的 99%，故方差减少了

1%。

4. (15 分) 设 (X, Y) 有联合密度

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)} (x^2 - 2\rho xy + y^2) \right\}.$$

令

$$Z = \frac{Y - \rho X}{\sqrt{1-\rho^2}}.$$

(1) 证明 X, Z 独立且均服从 $N(0, 1)$ 分布；

(2) 求 $(|X|, |Z|)$ 的密度函数；

(3) 求 $P(X \geq 0, Y \geq 0)$ 。

解答

(1) 由

$$y = \rho x + \sqrt{1-\rho^2} z, \quad \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(x, z)} \right| = \sqrt{1-\rho^2},$$

得

$$\begin{aligned} f_{X,Z}(x, z) &= f_{X,Y} \left(x, \rho x + \sqrt{1-\rho^2} z \right) \sqrt{1-\rho^2} \\ &= \frac{1}{2\pi} \exp \left\{ -\frac{x^2 + z^2}{2} \right\}. \end{aligned}$$

因而

$$f_{X,Z}(x, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2},$$

所以 X, Z 独立，且均服从 $N(0, 1)$ 。

(2) 设

$$U = |X|, \quad V = |Z|.$$

当 $u \geq 0, v \geq 0$ 时，

$$\begin{aligned} f_{U,V}(u, v) &= f_{X,Z}(u, v) + f_{X,Z}(-u, v) + f_{X,Z}(u, -v) + f_{X,Z}(-u, -v) \\ &= \frac{2}{\pi} e^{-(u^2+v^2)/2}. \end{aligned}$$

因此

$$f_{|X|,|Z|}(u, v) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} e^{-(u^2+v^2)/2}, & u \geq 0, v \geq 0, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

(3) 因为

$$Y = \rho X + \sqrt{1 - \rho^2} Z,$$

所以

$$P(X \geq 0, Y \geq 0) = P\left(X \geq 0, Z \geq -\frac{\rho}{\sqrt{1 - \rho^2}} X\right).$$

令

$$D = \left\{ (x, z) : x \geq 0, z \geq -\frac{\rho}{\sqrt{1 - \rho^2}} x \right\}.$$

作极坐标变换

$$x = r \cos \theta, \quad z = r \sin \theta.$$

令

$$\alpha = \arccos \rho.$$

则

$$-\frac{\rho}{\sqrt{1 - \rho^2}} = -\cot \alpha.$$

区域 D 对应的角度范围为

$$D_\theta = \left[-\frac{\pi}{2} + \alpha, \frac{\pi}{2} \right],$$

因此

$$\begin{aligned} P(X \geq 0, Y \geq 0) &= \int_{-\frac{\pi}{2} + \alpha}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty \frac{1}{2\pi} e^{-r^2/2} r dr d\theta \\ &= \frac{\pi - \alpha}{2\pi} = \frac{\pi - \arccos \rho}{2\pi}. \end{aligned}$$

所以

$$P(X \geq 0, Y \geq 0) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\arccos \rho}{\pi} \right).$$

5. (10 分) 假设一只蚕产的卵的个数 ξ 服从参数为 λ 的泊松分布, 而每个卵能成虫的概率为 p , 且每个卵之间成虫是相互独立的, 并设一只蚕产的卵的成虫数为随机变量 η , 问

(1) 求 η 的数学期望;

(2) 求 $E(\xi | \eta)$.

解答

(1) 已知 $\xi = n$ 时, η 服从二项分布

$$\eta | \xi = n \sim B(n, p).$$

因此

$$E(\eta | \xi = n) = np,$$

从而

$$E(\eta | \xi) = p\xi.$$

由重期望公式,

$$E\eta = E(E(\eta | \xi)) = E(p\xi) = pE\xi = \lambda p.$$

(2) 先求条件分布. 对 $n \geq k$, 有

$$\begin{aligned} P(\xi = n, \eta = k) &= P(\xi = n)P(\eta = k | \xi = n) \\ &= e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^k}{k!} \frac{(\lambda(1-p))^{n-k}}{(n-k)!}. \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} P(\eta = k) &= \sum_{n=k}^{\infty} P(\xi = n, \eta = k) \\ &= e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^k}{k!} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(\lambda(1-p))^{n-k}}{(n-k)!} \\ &= e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{\lambda(1-p)} \\ &= e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^k}{k!}. \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} P(\xi = n | \eta = k) &= \frac{P(\xi = n, \eta = k)}{P(\eta = k)} \\ &= e^{-\lambda(1-p)} \frac{(\lambda(1-p))^{n-k}}{(n-k)!}, \quad n \geq k. \end{aligned}$$

所以 $\xi | \eta = k$ 的分布相当于 $k + \text{Poisson}(\lambda(1-p))$. 于是

$$E(\xi | \eta = k) = k + \lambda(1-p).$$

将 k 换成 η , 得到

$$E(\xi | \eta) = \eta + \lambda(1-p).$$

6. (15 分) 设随机变量列 $\{X_n\}_{n=2}^{\infty}$ 相互独立, 且满足

$$P(X_n = -n) = P(X_n = n) = \frac{1}{2n \log n}, \quad P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n \log n}.$$

证明:

- (1) $\frac{1}{n} \sum_{i=2}^n X_i$ 以 L^2 收敛到 0;
- (2) $\frac{1}{n} \sum_{i=2}^n X_i$ 依概率收敛到 0;
- (3) $\frac{1}{n} \sum_{i=2}^n X_i$ 不几乎处处收敛到 0.

解答 记

$$S_n = \sum_{i=2}^n X_i.$$

由分布的对称性,

$$EX_i = 0.$$

又

$$EX_i^2 = i^2 \cdot \frac{1}{i \log i} = \frac{i}{\log i},$$

所以

$$\text{Var}(X_i) = \frac{i}{\log i}.$$

(1) 因为 X_i 相互独立, 所以

$$E\left(\frac{S_n}{n}\right)^2 = \text{Var}\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=2}^n \text{Var}(X_i) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=2}^n \frac{i}{\log i}.$$

和式由 Stolz 定理可知收敛于 0:

$$E\left(\frac{S_n}{n}\right)^2 \rightarrow 0,$$

即

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{L^2} 0.$$

(2) 由 Chebyshev 不等式, 对任意 $\varepsilon > 0$,

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| > \varepsilon\right) \leq \frac{E(S_n/n)^2}{\varepsilon^2}.$$

由第 (1) 问,

$$E(S_n/n)^2 \rightarrow 0,$$

所以

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| > \varepsilon\right) \rightarrow 0.$$

故

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} 0.$$

(3) 注意到

$$P\left(\left|\frac{X_n}{n}\right|=1\right) = P(X_n = n) + P(X_n = -n) = \frac{1}{n \log n}.$$

而

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n} = \infty.$$

由于事件

$$A_n = \left\{\left|\frac{X_n}{n}\right|=1\right\}$$

相互独立, 由 Borel-Cantelli 引理知

$$P(A_n \text{ i.o.}) = 1.$$

因此

$$\frac{X_n}{n}$$

不几乎处处收敛到 0。

若反设

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{a.s.}} 0,$$

则

$$\frac{S_{n-1}}{n-1} \xrightarrow{\text{a.s.}} 0.$$

于是

$$\frac{X_n}{n} = \frac{S_n - S_{n-1}}{n} = \frac{S_n}{n} - \frac{n-1}{n} \cdot \frac{S_{n-1}}{n-1} \xrightarrow{\text{a.s.}} 0,$$

矛盾。

所以

$$\frac{1}{n} \sum_{i=2}^n X_i$$

不几乎处处收敛到 0。

【注:】本题和上一套题的第二题几乎一致, 可以关注在该题处笔者写的注释。

7. (10 分) 现有股票价格模型如下: 假设当前时间的股票价格为 s , 则一个单位时间后股票的价格以概率 p 上涨为 us , 以概率 $1-p$ 下跌为 ds 。记 W_n 为 n 个单位时间后的股票价格。

(1) 请自己构造随机变量, 并用其来表示 W_n ;

(2) 证明存在常数 c , 使得 $\frac{1}{n} \log W_n$ 几乎处处收敛到 c , 这里 $\log$ 是以 10 为底的对数;

(3) 给定 $u = 1.012$, $d = 0.990$, $p = 0.4$, 请给出 600 天后股票价格上涨至少 30% 的概率近似公式 (用正态分布函数表示)。

$$\log 1.012 = 0.005, \quad \log 0.990 = -0.004, \quad \log 1.3 = 0.114.$$

解答

(1) 设 N_n 为 n 个单位时间中股票上涨的次数, 则

$$N_n \sim B(n, p).$$

于是 n 个单位时间中下跌的次数为 $n - N_n$, 故

$$W_n = su^{N_n} d^{n-N_n}.$$

(2) 由

$$W_n = su^{N_n} d^{n-N_n},$$

得

$$\frac{1}{n} \log W_n = \frac{1}{n} \log s + \frac{N_n}{n} \log u + \left(1 - \frac{N_n}{n}\right) \log d.$$

由强大数定律,

$$\frac{N_n}{n} \xrightarrow{\text{a.s.}} p.$$

又

$$\frac{1}{n} \log s \rightarrow 0,$$

所以

$$\frac{1}{n} \log W_n \xrightarrow{\text{a.s.}} p \log u + (1-p) \log d.$$

因此取

$$c = p \log u + (1-p) \log d,$$

即有

$$\frac{1}{n} \log W_n \xrightarrow{\text{a.s.}} c.$$

(3) 设 N 为 600 天中股票上涨的天数, 则

$$N \sim B(600, 0.4),$$

且

$$W_{600} = s(1.012)^N(0.990)^{600-N}.$$

于是

$$\begin{aligned} \log \frac{W_{600}}{s} &= N \log 1.012 + (600 - N) \log 0.990 \\ &= 600 \log 0.990 + N(\log 1.012 - \log 0.990). \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} P(W_{600} \geq 1.3s) &= P\left(\log \frac{W_{600}}{s} \geq \log 1.3\right) \\ &= P\left(N \geq \frac{\log 1.3 - 600 \log 0.990}{\log 1.012 - \log 0.990}\right). \end{aligned}$$

由中心极限定理,

$$\frac{N - 600p}{\sqrt{600p(1-p)}} = \frac{N - 240}{12} \approx N(0, 1).$$

因此

$$\begin{aligned} P(W_{600} \geq 1.3s) &\approx 1 - \Phi\left(\frac{\frac{\log 1.3 - 600 \log 0.990}{\log 1.012 - \log 0.990} - 240}{12}\right) \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{\frac{0.114 - 600(-0.004)}{0.005 - (-0.004)} - 240}{12}\right) \\ &\approx 1 - \Phi(3.28). \end{aligned}$$

其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数。

8. (20 分) 称随机变量是对称分布的, 若

$$P(X < -x) = P(X > x), \quad \forall x \geq 0.$$

- (1) 证明 X 是对称分布的充要条件是 X 和 $-X$ 同分布;
- (2) 证明 X 是对称分布的充要条件是 X 的特征函数 $\varphi(t)$ 是实值偶函数;
- (3) 假设存在某个对称分布的随机变量 X 的特征函数为

$$\varphi(t) = e^{-\sqrt{|t|}},$$

证明 $E(X^2) = \infty$;

- (4) 设随机变量序列 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ 独立同分布, 且特征函数为 $\varphi(t)$,

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i,$$

求实数列 $\{a_n\}$, 使得 $\frac{S_n}{a_n}$ 依分布收敛到一个非常值的随机变量, 并给出极限分布。

解答

(1) 若

$$X \stackrel{d}{=} -X,$$

则对任意 $x \geq 0$,

$$P(X < -x) = P(-X < -x) = P(X > x),$$

故 X 是对称分布的。

反之, 若 X 是对称分布的, 则对 $x \geq 0$, 有

$$P(X < -x) = P(X > x).$$

于是

$$P(-X \leq x) = P(X \geq -x) = 1 - P(X < -x) = 1 - P(X > x) = P(X \leq x).$$

故

$$F_{-X}(x) = F_X(x),$$

即

$$X \stackrel{d}{=} -X.$$

(2) 设 X 的特征函数为 $\varphi(t)$ 。若 X 对称分布, 由第 (1) 问,

$$X \stackrel{d}{=} -X.$$

因此

$$\varphi(t) = Ee^{itX} = Ee^{-itX} = \varphi(-t).$$

又一般地有

$$\varphi(-t) = \overline{\varphi(t)},$$

所以

$$\varphi(t) = \overline{\varphi(t)}.$$

故 $\varphi(t)$ 是实值偶函数。

反之, 若 $\varphi(t)$ 是实值偶函数, 则

$$\varphi_{-X}(t) = Ee^{it(-X)} = \varphi(-t) = \varphi(t).$$

由特征函数唯一性定理,

$$-X \stackrel{d}{=} X.$$

由第 (1) 问知, X 是对称分布的。

(3) 若 $E(X^2) < \infty$, 由于 X 对称分布,

$$\varphi(t) = E \cos(tX).$$

于是

$$\frac{1 - \varphi(t)}{t^2} = E \left(\frac{1 - \cos(tX)}{t^2} \right) \rightarrow \frac{1}{2} E(X^2), \quad t \rightarrow 0.$$

但由题设, 当 $t \rightarrow 0^+$ 时,

$$\frac{1 - \varphi(t)}{t^2} \sim \frac{\sqrt{t}}{t^2} = \frac{1}{t^{3/2}} \rightarrow \infty.$$

矛盾, 故

$$E(X^2) = \infty.$$

(4) 设 $\frac{S_n}{a_n}$ 的特征函数为 $\varphi_n(t)$, 则

$$\begin{aligned} \varphi_n(t) &= E \exp \left\{ it \frac{S_n}{a_n} \right\} \\ &= \left[\varphi \left(\frac{t}{a_n} \right) \right]^n \\ &= \left[\exp \left\{ -\sqrt{\left| \frac{t}{a_n} \right|} \right\} \right]^n \\ &= \exp \left\{ -\frac{n}{\sqrt{a_n}} \sqrt{|t|} \right\}. \end{aligned}$$

为使其收敛到一个非常值随机变量的特征函数，应有

$$\frac{n}{\sqrt{a_n}} \rightarrow c, \quad 0 < c < \infty.$$

取

$$a_n = n^2.$$

此时

$$\varphi_n(t) \rightarrow e^{-\sqrt{|t|}}.$$

由特征函数连续性定理（特征函数逐点收敛可推出随机变量依分布收敛），

$$\frac{S_n}{n^2} \xrightarrow{d} Y,$$

其中 Y 的特征函数为

$$\varphi_Y(t) = e^{-\sqrt{|t|}}.$$

因此可取

$$a_n = n^2,$$

极限分布就是特征函数为

$$e^{-\sqrt{|t|}}$$

的分布。

7 2019 年春期末考题

2019.6.10 晚

在以下各题中, $0 < p < 1, \lambda > 0$.

1. (15 分) 假设 W, U 相互独立, $W \sim \text{Exp}(\lambda)$, $U \sim U(0, 2\pi)$. 令

$$X = \sqrt{W} \cos U, \quad Y = \sqrt{W} \sin U.$$

- (1) 求 $\ln U$ 的分布函数;
 - (2) 求 (X, Y) 的联合密度函数;
 - (3) 求条件密度函数 $\rho_{X|W}(x | w)$.
2. (15 分) 现有 n 个可分辨的球和 $2n$ 个盒子, 将每个球独立 (等可能) 地随机放入一个盒子. 记 X_n 为空盒子的数目, Y_n 为第一个盒子中球的数目.
- (1) 求 EX_n ;
 - (2) 证明: 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\frac{X_n}{n}$ 依分布收敛;
 - (3) 证明: 当 $n \rightarrow \infty$ 时, Y_n 依分布收敛.
3. (20 分) 假设某条蚕的卵数 X 服从参数为 λ 的泊松分布, 每个卵独立地以概率 p 孵化为小蚕. 记 Y 为小蚕的数目.
- (1) 写出 X 的分布列;
 - (2) 求 Y 的分布列;
 - (3) 求 X 与 Y 的协方差;
 - (4) 证明: Y 与 $X - Y$ 相互独立.
4. (20 分) 假设 (X, Y) 服从二元正态分布,

$$EX = EY = 0, \quad \text{Var}(X) = \text{Var}(Y) = 1, \quad \text{Cov}(X, Y) = r.$$

假设 $a, b \in \mathbb{R}$.

- (1) 求 Ee^{aX} ;
 - (2) 求 $aX + bY$ 的特征函数;
 - (3) 求 $E(X | aX + bY)$, 其中 a, b 不全为 0;
 - (4) 证明:
- $$r = \cos(\pi P(XY < 0)).$$
5. (10 分) 某疾病的患病率为 0.5%. 某保险公司欲推出一种保险计划: 保费不超过 20 元, 若投保人患该疾病则公司赔付其 1 千元. 假设至少有 2500 人愿意购买此保险. 请保险公司定出此保险计划的最低售价 (精确到元), 以使得公司亏本的概率不超过 0.1%.

$$\Phi(2.3) = 0.99, \quad \Phi(2.6) = 0.995, \quad \Phi(3.1) = 0.999.$$

6. (10 分) 假设 $X_1, X_2, \dots$ 独立同分布. 证明:

- (1) 若 $E|X_1| < \infty$, 则

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n}{n} = 0\right) = 1;$$

- (2) 若 $E|X_1| = \infty$, 则

$$P\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|X_n|}{n} = \infty\right) = 1.$$

7. (10 分) 在围棋盘的每个交叉点上独立地以概率 p 放一枚黑子, 以概率 $1 - p$ 放一枚白子. 记

$$A = \{\text{存在从棋盘的左下角到右上角的只经过黑子的路径}\},$$

$$B = \{\text{存在从棋盘的左上角到右下角的只经过黑子的路径}\}.$$

- (1) 证明: $P(A)$ 关于 p 单调上升;
- (2) 证明: $P(B | A) \geq P(B)$.

注: 围棋盘上有 19 条横线、19 条纵线, 19×19 个交叉点, “路径”只能沿横线或纵线走.

8 2019 年春季期末题解答部分

1. (15 分) 假设 W, U 相互独立, $W \sim \text{Exp}(\lambda)$, $U \sim U(0, 2\pi)$. 令

$$X = \sqrt{W} \cos U, \quad Y = \sqrt{W} \sin U.$$

- (1) 求 $\ln U$ 的分布函数;
- (2) 求 (X, Y) 的联合密度函数;
- (3) 求条件密度函数 $\rho_{X|W}(x | w)$.

解答

(1) 设 $Z = \ln U$. 因为 $U \sim U(0, 2\pi)$, 所以

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(\ln U \leq z) = P(U \leq e^z).$$

因此

$$F_Z(z) = \begin{cases} \frac{e^z}{2\pi}, & z < \ln(2\pi), \\ 1, & z \geq \ln(2\pi). \end{cases}$$

(2) 由题意

$$f_{W,U}(w, u) = \frac{\lambda}{2\pi} e^{-\lambda w}, \quad w > 0, 0 < u < 2\pi.$$

作变换

$$x = \sqrt{w} \cos u, \quad y = \sqrt{w} \sin u.$$

则

$$w = x^2 + y^2,$$

且

$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(w, u)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\cos u}{2\sqrt{w}} & -\sqrt{w} \sin u \\ \frac{\sin u}{2\sqrt{w}} & \sqrt{w} \cos u \end{vmatrix} = \frac{1}{2}.$$

所以

$$\left| \frac{\partial(w, u)}{\partial(x, y)} \right| = 2.$$

注意到对于每一组 x, y 对应唯一的一组 w, u , 于是

$$f_{X,Y}(x, y) = f_{W,U}(x^2 + y^2, u) \cdot 2 = \frac{\lambda}{\pi} e^{-\lambda(x^2 + y^2)}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

(3) 给定 $W = w$ 时,

$$X = \sqrt{w} \cos U.$$

由于 $U \sim U(0, 2\pi)$, 故 $\cos U$ 的密度为

$$f_{\cos U}(t) = \frac{1}{\pi \sqrt{1-t^2}}, \quad -1 < t < 1.$$

因此当 $w > 0$ 时,

$$\rho_{X|W}(x | w) = \frac{1}{\sqrt{w}} f_{\cos U}\left(\frac{x}{\sqrt{w}}\right) = \frac{1}{\pi \sqrt{w-x^2}}, \quad -\sqrt{w} < x < \sqrt{w}.$$

即

$$\rho_{X|W}(x | w) = \begin{cases} \frac{1}{\pi \sqrt{w-x^2}}, & |x| < \sqrt{w}, w > 0, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

2. (15 分) 现有 n 个可分辨的球和 $2n$ 个盒子, 将每个球独立 (等可能) 地随机放入一个盒子. 记 X_n 为空盒子的数目, Y_n 为第一个盒子中球的数目.

(1) 求 EX_n ;

(2) 证明: 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\frac{X_n}{n}$ 依分布收敛;

(3) 证明: 当 $n \rightarrow \infty$ 时, Y_n 依分布收敛.

解答

(1) 令

$$I_k = \begin{cases} 1, & \text{第 } k \text{ 个盒子为空,} \\ 0, & \text{否则.} \end{cases}$$

则 $X_n = \sum_{k=1}^{2n} I_k$. 又 $P(I_k = 1) = (1 - \frac{1}{2n})^n$. 所以

$$EX_n = 2n \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^n.$$

(2) 由上一问,

$$E \frac{X_n}{n} = 2 \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^n \rightarrow 2e^{-1/2}.$$

下面证明方差趋于 0. 我们知道 $I_k \sim B(1, (1 - \frac{1}{2n})^n)$, 记

$$p_n = \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^n, \quad q_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n.$$

于是

$$\text{Var}(X_n) = \sum_{k=1}^{2n} \text{Var}(I_k) + \sum_{i \neq j} \text{Cov}(I_i, I_j)$$

即

$$\text{Var}(X_n) = 2n p_n (1 - p_n) + 2n(2n - 1)(q_n - p_n^2).$$

故

$$\text{Var}\left(\frac{X_n}{n}\right) = \frac{2n p_n (1 - p_n)}{n^2} + \frac{2n(2n - 1)(q_n - p_n^2)}{n^2}.$$

因为 $p_n \rightarrow e^{-1/2}, q_n \rightarrow e^{-1}$, 故 $q_n - p_n^2 = O(\frac{1}{n})$, 所以 $\text{Var}\left(\frac{X_n}{n}\right) \rightarrow 0$. 由切比雪夫不等式, $\frac{X_n}{n} \xrightarrow{P} 2e^{-1/2}$. 因而

$$\frac{X_n}{n} \xrightarrow{d} 2e^{-1/2}.$$

(3) 对任意固定的 $k = 0, 1, 2, \dots$, 有

$$P(Y_n = k) = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2n}\right)^k \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^{n-k}.$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时,

$$\binom{n}{k} \left(\frac{1}{2n}\right)^k = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \cdot \frac{1}{(2n)^k} \rightarrow \frac{1}{2^k k!},$$

且

$$\left(1 - \frac{1}{2n}\right)^{n-k} \rightarrow e^{-1/2}.$$

故

$$P(Y_n = k) \rightarrow e^{-1/2} \frac{(1/2)^k}{k!}.$$

因此

$$Y_n \xrightarrow{d} Y,$$

其中

$$P(Y = k) = e^{-1/2} \frac{(1/2)^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

注：本题用到的结论：

1. 若

$$EZ_n \rightarrow c, \quad \text{Var}(Z_n) \rightarrow 0,$$

则

$$Z_n \xrightarrow{P} c.$$

2. 若

$$Z_n \xrightarrow{P} c,$$

则

$$Z_n \xrightarrow{d} c.$$

3. 对非负整数值随机变量，若对每个 $k = 0, 1, 2, \dots$ ，都有

$$P(Y_n = k) \rightarrow P(Y = k),$$

则

$$Y_n \xrightarrow{d} Y.$$

【总结】依分布收敛的常用判据

1. 分布函数判据

设 $F_n(x)$ 是 X_n 的分布函数， $F(x)$ 是 X 的分布函数。若对 F 的一切连续点 x ，都有

$$F_n(x) \rightarrow F(x),$$

则

$$X_n \xrightarrow{d} X.$$

2. 分布列逐点收敛判据

若 X_n, X 均取值于 $\{0, 1, 2, \dots\}$ ，且对任意固定的 $k = 0, 1, 2, \dots$ ，有

$$P(X_n = k) \rightarrow P(X = k),$$

则

$$X_n \xrightarrow{d} X.$$

3. 特征函数判据

设 X_n 的特征函数为

$$\varphi_n(t) = Ee^{itX_n},$$

X 的特征函数为

$$\varphi(t) = Ee^{itX}.$$

若对任意 $t \in \mathbb{R}$ ，都有

$$\varphi_n(t) \rightarrow \varphi(t),$$

则

$$X_n \xrightarrow{d} X.$$

4. 依概率收敛推出依分布收敛

若

$$X_n \xrightarrow{P} X,$$

则

$$X_n \xrightarrow{d} X.$$

特别地，若

$$X_n \xrightarrow{P} c,$$

则

$$X_n \xrightarrow{d} c.$$

5. 连续映射定理

若

$$X_n \xrightarrow{d} X,$$

且 g 是连续函数，则

$$g(X_n) \xrightarrow{d} g(X).$$

6. Slutsky 定理

若

$$X_n \xrightarrow{d} X, \quad Y_n \xrightarrow{P} c,$$

则

$$X_n + Y_n \xrightarrow{d} X + c,$$

$$X_n Y_n \xrightarrow{d} cX.$$

若 $c \neq 0$, 还有

$$\frac{X_n}{Y_n} \xrightarrow{d} \frac{X}{c}.$$

3. (20 分) 假设某条蚕的卵数 X 服从参数为 λ 的泊松分布, 每个卵独立地以概率 p 孵化为小蚕. 记 Y 为小蚕的数目.

- (1) 写出 X 的分布列;
- (2) 求 Y 的分布列;
- (3) 求 X 与 Y 的协方差;
- (4) 证明: Y 与 $X - Y$ 相互独立.

解答

(1)

$$P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

(2) 当给定 $X = n$ 时,

$$Y | X = n \sim B(n, p).$$

因此对 $k = 0, 1, 2, \dots$, 有

$$\begin{aligned} P(Y = k) &= \sum_{n=k}^{\infty} P(Y = k | X = n) P(X = n) \\ &= \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \\ &= e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^k}{k!} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{[\lambda(1-p)]^{n-k}}{(n-k)!} \\ &= e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{\lambda(1-p)} \\ &= e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

即

$$Y \sim \text{Poi}(\lambda p).$$

(3) 由条件期望,

$$E(Y | X) = pX.$$

因此

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X, Y) &= E(XY) - EXEY \\ &= E\{XE(Y | X)\} - EXEY \\ &= E(pX^2) - \lambda \cdot \lambda p. \end{aligned}$$

又因为 $X \sim \text{Poi}(\lambda)$, 所以

$$EX = \lambda, \quad \text{Var}(X) = \lambda,$$

从而

$$EX^2 = \text{Var}(X) + (EX)^2 = \lambda + \lambda^2.$$

于是

$$\text{Cov}(X, Y) = p(\lambda + \lambda^2) - p\lambda^2 = \lambda p.$$

(4) 对任意 $i, j = 0, 1, 2, \dots$, 有

$$\begin{aligned} P(Y = i, X - Y = j) &= P(Y = i, X = i + j) \\ &= P(Y = i | X = i + j)P(X = i + j) \\ &= \binom{i+j}{i} p^i (1-p)^j e^{-\lambda} \frac{\lambda^{i+j}}{(i+j)!} \\ &= e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^i}{i!} \frac{[\lambda(1-p)]^j}{j!} \\ &= \left(e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^i}{i!} \right) \left(e^{-\lambda(1-p)} \frac{[\lambda(1-p)]^j}{j!} \right). \end{aligned}$$

其中

$$P(Y = i) = e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^i}{i!}.$$

同理可得

$$P(X - Y = j) = e^{-\lambda(1-p)} \frac{[\lambda(1-p)]^j}{j!}.$$

因此

$$P(Y = i, X - Y = j) = P(Y = i)P(X - Y = j),$$

所以

Y 与 $X - Y$ 相互独立.

4. (20 分) 假设 (X, Y) 服从二元正态分布,

$$EX = EY = 0, \quad \text{Var}(X) = \text{Var}(Y) = 1, \quad \text{Cov}(X, Y) = r.$$

假设 $a, b \in \mathbb{R}$.

- (1) 求 Ee^{aX} ;
- (2) 求 $aX + bY$ 的特征函数;
- (3) 求 $E(X | aX + bY)$, 其中 a, b 不全为 0;
- (4) 证明:

$$r = \cos(\pi P(XY < 0)).$$

解答

(1) 因为 $X \sim N(0, 1)$, 所以

$$\varphi_X(t) = Ee^{itX} = e^{-t^2/2}.$$

取 $t = -ia$, 得

$$Ee^{aX} = \varphi_X(-ia) = e^{a^2/2}.$$

(2) 因为 (X, Y) 服从二元正态分布, 所以

$$aX + bY \sim N(0, a^2 + b^2 + 2abr).$$

因此其特征函数为

$$\varphi_{aX+bY}(t) = \exp \left\{ -\frac{1}{2}(a^2 + b^2 + 2abr)t^2 \right\}.$$

(3) 记

$$Z = aX + bY.$$

则

$$EZ = 0, \quad \text{Var}(Z) = a^2 + b^2 + 2abr,$$

且

$$\text{Cov}(X, Z) = \text{Cov}(X, aX + bY) = a + br.$$

由二元正态条件期望公式,

$$E(X | Z) = EX + \frac{\text{Cov}(X, Z)}{\text{Var}(Z)}(Z - EZ).$$

故

$$E(X | aX + bY) = \frac{a + br}{a^2 + b^2 + 2abr}(aX + bY).$$

(4) 令

$$X = Z_1, \quad Y = rZ_1 + \sqrt{1-r^2}Z_2,$$

其中 Z_1, Z_2 独立同分布, 且

$$Z_1, Z_2 \sim N(0, 1).$$

设

$$r = \cos \theta, \quad \sqrt{1-r^2} = \sin \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \pi.$$

由二维标准正态的旋转对称性, 设

$$Z_1 = R \cos \alpha, \quad Z_2 = R \sin \alpha,$$

其中 $\alpha \sim U(0, 2\pi)$. 于是

$$Y = R \cos(\alpha - \theta).$$

因此

$$XY < 0 \iff \cos \alpha \cos(\alpha - \theta) < 0.$$

在一个周期内, 上式成立的 α 的长度为 2θ , 故

$$P(XY < 0) = \frac{2\theta}{2\pi} = \frac{\theta}{\pi}.$$

所以

$$\theta = \pi P(XY < 0).$$

又 $r = \cos \theta$, 故

$$r = \cos(\pi P(XY < 0)).$$

5. (10 分) 某疾病的患病率为 0.5%. 某保险公司欲推出一种保险计划: 保费不超过 20 元, 若投保人患该疾病则公司赔付其 1 千元. 假设至少有 2500 人愿意购买此保险. 请保险公司定出此保险计划的最低售价 (精确到元), 以使得公司亏本的概率不超过 0.1%.

$$\Phi(2.3) = 0.99, \quad \Phi(2.6) = 0.995, \quad \Phi(3.1) = 0.999.$$

解答 设 N 为 2500 人中患病人数, 则

$$N \sim B(2500, 0.005).$$

于是

$$EN = 2500 \times 0.005 = 12.5,$$

$$\text{Var}(N) = 2500 \times 0.005 \times 0.995 = 12.4375.$$

设每人保费为 x 元, 则公司亏本当且仅当

$$1000N > 2500x,$$

即

$$N > 2.5x.$$

由中心极限定理,

$$\frac{N - 12.5}{\sqrt{12.4375}} \approx N(0, 1).$$

要使亏本概率不超过 0.1%, 取

$$\Phi(3.1) = 0.999.$$

故要求

$$\frac{2.5x - 12.5}{\sqrt{12.4375}} \geq 3.1.$$

因此

$$x \geq \frac{12.5 + 3.1\sqrt{12.4375}}{2.5} \approx 9.37.$$

所以最低售价为

$$\boxed{10 \text{ 元}}.$$

6. (10 分) 假设 $X_1, X_2, \dots$ 独立同分布. 证明:

(1) 若 $E|X_1| < \infty$, 则

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n}{n} = 0\right) = 1;$$

(2) 若 $E|X_1| = \infty$, 则

$$P\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|X_n|}{n} = \infty\right) = 1.$$

解答

(1) 记

$$S_n = X_1 + \dots + X_n.$$

因为 $X_1, X_2, \dots$ 独立同分布, 且 $E|X_1| < \infty$, 由强大数定律,

$$\frac{S_n}{n} \rightarrow EX_1, \quad a.s., \quad \frac{S_{n-1}}{n} \rightarrow EX_1, \quad a.s.,$$

所以

$$\frac{X_n}{n} \rightarrow EX_1 - EX_1 = 0, \quad a.s.$$

即

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n}{n} = 0\right) = 1.$$

(2) 任取 $M > 0$. 令

$$A_n = \left\{\frac{|X_n|}{n} > M\right\} = \{|X_n| > Mn\}.$$

由于 $X_1, X_2, \dots$ 独立同分布, 所以 $A_1, A_2, \dots$ 相互独立, 且

$$P(A_n) = P(|X_1| > Mn).$$

下面证明

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_1| > Mn) = \infty.$$

记

$$f(x) = P(|X_1| > x).$$

则 $f(x)$ 关于 x 单调下降, 且

$$E|X_1| = \int_0^{\infty} P(|X_1| > x) dx = \int_0^{\infty} f(x) dx = \infty.$$

对每个 $n \geq 1$, 当 $x \in [Mn, M(n+1)]$ 时,

$$f(x) \leq f(Mn).$$

因此

$$\int_M^{\infty} f(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{Mn}^{M(n+1)} f(x) dx \leq M \sum_{n=1}^{\infty} f(Mn).$$

左边为 ∞ , 故

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_1| > Mn) = \sum_{n=1}^{\infty} f(Mn) = \infty.$$

由 Borel-Cantelli 引理,

$$P(A_n \text{ i.o.}) = 1.$$

即

$$P\left(\frac{|X_n|}{n} > M \text{ 无穷多次发生}\right) = 1.$$

所以

$$P\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|X_n|}{n} \geq M\right) = 1.$$

令 $M = 1, 2, 3, \dots$, 取可数交, 得

$$P\left(\forall M \in \mathbb{N}, \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|X_n|}{n} \geq M\right) = 1.$$

因而

$$P\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|X_n|}{n} = \infty\right) = 1.$$

7. (10 分) 在围棋盘的每个交叉点上独立地以概率 p 放一枚黑子, 以概率 $1 - p$ 放一枚白子. 记

$$A = \{\text{存在从棋盘的左下角到右上角的只经过黑子的路径}\},$$

$$B = \{\text{存在从棋盘的左上角到右下角的只经过黑子的路径}\}.$$

(1) 证明: $P(A)$ 关于 p 单调上升;

(2) 证明: $P(B | A) \geq P(B)$.

注: 围棋盘上有 19 条横线、19 条纵线, 19×19 个交叉点, “路径”只能沿横线或纵线走.

解答

(1) 证明: 设棋盘交叉点集为 V . 对每个局面 ω , 定义

$$\omega_v = \begin{cases} 1, & v \text{ 点为黑子}, \\ 0, & v \text{ 点为白子}. \end{cases}$$

于是一个局面可记为

$$\omega = (\omega_v)_{v \in V}.$$

定义 $\omega \leq \omega'$: 若对任意 $v \in V$, 都有 $\omega_v \leq \omega'_v$, 这表示 ω' 是由 ω 把若干白子改成黑子得到的.

称事件 C 为单调上升事件, 是指若 $\omega \in C$, $\omega \leq \omega'$, 则必有 $\omega' \in C$.

我们知道 A 是单调上升事件. 因为若 $\omega \in A$, 则在局面 ω 中存在一条从左下角到右上角的全黑路径. 若 $\omega \leq \omega'$, 则 ω' 只是把一些白子改成黑子, 原来那条全黑路径上的黑子仍然是黑子, 所以这条路径在 ω' 中仍然存在.

现在证明 $P(A)$ 关于 p 单调上升. 取一组独立同分布随机变量

$$U_v \sim U(0, 1), \quad v \in V.$$

对参数 p , 令

$$\omega_v^{(p)} = \begin{cases} 1, & U_v \leq p, \\ 0, & U_v > p. \end{cases}$$

则 $\omega^{(p)}$ 正好对应每点以概率 p 放黑子的随机局面.

若 $0 < p_1 < p_2 < 1$, 则对任意 $v \in V$,

$$\omega_v^{(p_1)} \leq \omega_v^{(p_2)}.$$

即

$$\omega^{(p_1)} \leq \omega^{(p_2)}.$$

由于 A 是单调上升事件, 故

$$\mathbf{1}_A(\omega^{(p_1)}) \leq \mathbf{1}_A(\omega^{(p_2)}).$$

两边取期望, 得到

$$P_{p_1}(A) \leq P_{p_2}(A).$$

因此

$$P(A)$$

关于 p 单调上升.

(2) 先证明一个简单结论.

设 $\xi_1, \dots, \xi_m$ 相互独立, 且

$$P(\xi_i = 1) = p, \quad P(\xi_i = 0) = 1 - p.$$

设事件 C, D 都有如下性质: 若把某些坐标由 0 改成 1, 则事件一旦发生就仍然发生. 则

$$P(CD) \geq P(C)P(D).$$

下面证明这个结论. 记

$$f = \mathbf{1}_C, \quad g = \mathbf{1}_D.$$

则 f, g 都随每个坐标的增大而不减.

对坐标个数归纳, 若只有一个坐标. 此时

$$\text{Cov}(f(\xi_1), g(\xi_1)) = p(1-p)(f(1) - f(0))(g(1) - g(0)) \geq 0.$$

所以

$$Efg \geq EfEg.$$

对一般 m 个坐标, 将最后一个坐标单独拿出, 记

$$f_i = f(\xi_1, \dots, \xi_{m-1}, i), \quad g_i = g(\xi_1, \dots, \xi_{m-1}, i), \quad i = 0, 1.$$

由归纳假设,

$$E(f_i g_i) \geq E f_i E g_i, \quad i = 0, 1.$$

因此

$$\begin{aligned} E f g &= (1-p)E(f_0 g_0) + pE(f_1 g_1) \\ &\geq (1-p)E f_0 E g_0 + pE f_1 E g_1. \end{aligned}$$

又因为 f, g 随坐标增大而不减, 所以

$$E f_0 \leq E f_1, \quad E g_0 \leq E g_1.$$

从而

$$(1-p)E f_0 E g_0 + pE f_1 E g_1 \geq ((1-p)E f_0 + pE f_1)((1-p)E g_0 + pE g_1).$$

即

$$E f g \geq E f E g.$$

也就是

$$P(C \cap D) \geq P(C)P(D).$$

现在回到本题. 对事件 A , 如果把若干白子改成黑子, 原来的黑子路径不会消失; 对事件 B 也同理. 因此上面的结论可用于 $C = A, D = B$, 得到

$$P(A \cap B) \geq P(A)P(B).$$

因为 $P(A) > 0$, 所以

$$P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \geq P(B).$$

9 2019 年秋期末考题

1. (10 分) 假设 X, Y, Z 是相互独立的随机变量, 其中 Z 服从参数为 p 的 Bernoulli 分布, 即

$$Z \sim B(1, p).$$

令

$$V = XZ + Y(1 - Z).$$

用 F_X, F_Y 与 p 表示 V 的分布函数。

2. (10 分) 假设 Y 是服从参数为 1 的指数分布随机变量, 令

$$X = Y - [Y], \quad Z = [Y],$$

这里对任意实数 y , $[y]$ 表示小于等于 y 的最大整数。

(1) 求 $P(X \leq x, Z = n)$, 其中 $x \in \mathbb{R}$, n 是非负整数;

(2) X 与 Z 是否独立? 为什么?

3. (16 分) 假设 X 与 Y 的联合密度是

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x^2 - 2\rho xy + y^2)\right\}, \quad x, y \in \mathbb{R},$$

其中 $\rho \in (0, 1)$ 。令

$$Z = \frac{Y - \rho X}{\sqrt{1-\rho^2}}.$$

(1) 求 $\text{cov}(X, Z)$;

(2) 求 (X, Z) 的密度函数;

(3) 求 $X^2 + Z^2$ 的密度函数;

(4) 进一步假设 $\rho = \sqrt{2}/2$, 求 $P(X \geq 0, Y \geq 0)$ 。

4. (14 分) 假设随机变量 X, Y 的联合概率密度函数为

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{4ah}, & -a + bx < y < a + bx, \quad -h < x < h, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

其中 a, b, h 都是正常数。

(1) 求 X 与 Y 的相关系数 ρ ;

(2) 求条件期望 $E(Y | X)$ 及 Y 关于 X 的最佳线性预测。

5. (10 分) 某部电梯只负责将地面乘客送到地上各楼层, 且在地面之上有 N 个楼层 (不包括地面)。假设从地面上电梯的人数是均值为 10 的 Poisson 分布的随机变量, 且每个进入电梯的人独立地、等可能地选取一个楼层下电梯。又假设电梯只在有乘客下电梯时才停 (地面之上没有上电梯的乘客)。求电梯在卸载所有乘客前期望停的次数 (不包括地面)。

6. (10 分) 假设 $X_n, n \geq 1$, 是独立同分布的随机变量, 且均值为 0, 方差有限。令

$$S_n = \sum_{k=1}^n X_k.$$

证明: 对任意 $p > 1/2$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时,

$$\frac{S_n}{n^p} \xrightarrow{P} 0.$$

7. (15 分)

(1) 假设 $X_2, X_3, \dots, X_n, \dots$ 是定义在同一个概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上的独立随机变量列, 满足:

$$P(X_n = n) = P(X_n = -n) = \frac{1}{2n\sqrt{\log n}}, \quad P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n\sqrt{\log n}}.$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时,

$$n^{-1} \sum_{i=2}^n X_i$$

是否依概率收敛? 为什么?

(2) 假设 $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ 是定义在同一个概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上的独立随机变量列, 满足: 其中 $\beta > 1$,

$$P(X_n = n) = P(X_n = -n) = \frac{1}{2}n^{-\beta}, \quad P(X_n = 0) = 1 - n^{-\beta}.$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时,

$$n^{-1} \sum_{i=2}^n X_i$$

是否几乎处处收敛? 为什么?

8. (15 分) 用概率方法证明: 对任意 $x, y > 0$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时,

$$\sum_{k=0}^{\lfloor nx \rfloor} e^{-ny} \frac{(ny)^k}{k!} \rightarrow \begin{cases} 0, & x < y, \\ \frac{1}{2}, & x = y, \\ 1, & x > y. \end{cases}$$

10 2019 年秋期末题解答部分

1. (10 分) 假设 X, Y, Z 是相互独立的随机变量, 其中 $Z \sim B(1, p)$ 。令

$$V = XZ + Y(1 - Z).$$

用 F_X, F_Y 与 p 表示 V 的分布函数。

解:

当 $Z = 1$ 时 $V = X$; 当 $Z = 0$ 时 $V = Y$ 。故对任意 $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} F_V(t) &= P(V \leq t) \\ &= P(X \leq t, Z = 1) + P(Y \leq t, Z = 0) \\ &= pF_X(t) + (1 - p)F_Y(t). \end{aligned}$$

所以

$$F_V(t) = pF_X(t) + (1 - p)F_Y(t).$$

2. (10 分) 假设 Y 是服从参数为 1 的指数分布随机变量, 令

$$X = Y - [Y], \quad Z = [Y],$$

这里对任意实数 y , $[y]$ 表示小于等于 y 的最大整数。

- (1) 求 $P(X \leq x, Z = n)$, 其中 $x \in \mathbb{R}$, n 是非负整数;

- (2) X 与 Z 是否独立? 为什么?

解:

- (1) 当 $Z = n$ 时, $n \leq Y < n + 1$, 且 $X = Y - n$ 。所以

$$P(X \leq x, Z = n) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \int_n^{n+x} e^{-y} dy = e^{-n}(1 - e^{-x}), & 0 \leq x < 1, \\ \int_n^{n+1} e^{-y} dy = e^{-n}(1 - e^{-1}), & x \geq 1. \end{cases}$$

- (2) 有

$$P(Z = n) = \int_n^{n+1} e^{-y} dy = e^{-n}(1 - e^{-1}).$$

又当 $0 \leq x < 1$ 时,

$$P(X \leq x) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n}(1 - e^{-x}) = \frac{1 - e^{-x}}{1 - e^{-1}}.$$

因此

$$P(X \leq x, Z = n) = P(X \leq x)P(Z = n),$$

对 $x < 0$ 和 $x \geq 1$ 也显然成立, 故 X 与 Z 独立。

3. (16 分) 假设 X 与 Y 的联合密度是

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)} (x^2 - 2\rho xy + y^2) \right\}, \quad x, y \in \mathbb{R},$$

其中 $\rho \in (0, 1)$ 。令

$$Z = \frac{Y - \rho X}{\sqrt{1-\rho^2}}.$$

- (1) 求 $\text{cov}(X, Z)$;

- (2) 求 (X, Z) 的密度函数;

- (3) 求 $X^2 + Z^2$ 的密度函数;

- (4) 进一步假设 $\rho = \sqrt{2}/2$, 求 $P(X \geq 0, Y \geq 0)$ 。

解:

- (1) 由二维正态分布可知

$$EX = EY = 0, \quad \text{var}(X) = \text{var}(Y) = 1, \quad \text{cov}(X, Y) = \rho.$$

因此

$$\text{cov}(X, Z) = \frac{\text{cov}(X, Y) - \rho \text{var}(X)}{\sqrt{1-\rho^2}} = 0.$$

(2) 由

$$y = \rho x + \sqrt{1 - \rho^2} z$$

作变量替换, Jacobian 为 $\sqrt{1 - \rho^2}$ 。代入得

$$f_{X,Z}(x, z) = \frac{1}{2\pi} \exp \left\{ -\frac{x^2 + z^2}{2} \right\}, \quad x, z \in \mathbb{R}.$$

所以 X, Z 相互独立, 且均服从 $N(0, 1)$ 。

(3) 由上一问,

$$f_{X,Z}(x, z) = \frac{1}{2\pi} \exp \left\{ -\frac{x^2 + z^2}{2} \right\}.$$

令

$$T = X^2 + Z^2.$$

当 $t \leq 0$ 时, $F_T(t) = 0$ 。当 $t > 0$ 时, 用极坐标换元

$$x = r \cos \theta, \quad z = r \sin \theta,$$

得

$$\begin{aligned} F_T(t) &= P(X^2 + Z^2 \leq t) \\ &= \iint_{x^2 + z^2 \leq t} \frac{1}{2\pi} e^{-(x^2 + z^2)/2} dx dz \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{t}} \frac{1}{2\pi} e^{-r^2/2} r dr d\theta \\ &= 1 - e^{-t/2}. \end{aligned}$$

因此 $T = X^2 + Z^2$ 的密度函数为

$$f_T(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-t/2}, & t > 0, \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$$

(4) 当 $\rho = \sqrt{2}/2$ 时,

$$Y = \frac{\sqrt{2}}{2} X + \frac{\sqrt{2}}{2} Z.$$

因此

$$P(X \geq 0, Y \geq 0) = P(X \geq 0, X + Z \geq 0).$$

由第二问,

$$f_{X,Z}(x, z) = \frac{1}{2\pi} e^{-(x^2 + z^2)/2}.$$

记

$$D = \{(x, z) : x \geq 0, x + z \geq 0\}.$$

用极坐标换元

$$x = r \cos \theta, \quad z = r \sin \theta,$$

则区域 D 对应

$$r \geq 0, \quad -\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

所以

$$\begin{aligned} P(X \geq 0, Y \geq 0) &= \iint_D \frac{1}{2\pi} e^{-(x^2 + z^2)/2} dx dz \\ &= \int_{-\pi/4}^{\pi/2} \int_0^\infty \frac{1}{2\pi} e^{-r^2/2} r dr d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{3\pi}{4} \cdot 1 \\ &= \frac{3}{8}. \end{aligned}$$

4. (14 分) 假设随机变量 X, Y 的联合概率密度函数为

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{4ah}, & -a + bx < y < a + bx, \quad -h < x < h, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

其中 a, b, h 都是正常数。

(1) 求 X 与 Y 的相关系数 ρ ;

(2) 求条件期望 $E(Y | X)$ 及 Y 关于 X 的最佳线性预测。

解:

(1) 由题意可看作

$$X \sim U(-h, h), \quad Y = bX + U,$$

其中 $U \sim U(-a, a)$, 且 X 与 U 独立。于是

$$EX = EY = 0, \quad \text{var}(X) = \frac{h^2}{3},$$

$$\text{cov}(X, Y) = \text{cov}(X, bX + U) = b \text{var}(X) = \frac{bh^2}{3},$$

$$\text{var}(Y) = b^2 \text{var}(X) + \text{var}(U) = \frac{b^2h^2 + a^2}{3}.$$

故

$$\rho = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{var}(X) \text{var}(Y)}} = \frac{bh}{\sqrt{b^2h^2 + a^2}}.$$

(2) 因为给定 $X = x$ 时,

$$Y | X = x \sim U(bx - a, bx + a),$$

所以

$$E(Y | X = x) = bx, \quad E(Y | X) = bX.$$

又 Y 关于 X 的最佳线性预测为

$$\hat{Y} = EY + \frac{\text{cov}(X, Y)}{\text{var}(X)}(X - EX) = b\hat{X}.$$

注: 最佳线性预测公式

所谓 Y 关于 X 的最佳线性预测, 是指在所有线性函数

$$\alpha + \beta X$$

中, 找一个使均方误差

$$E(Y - \alpha - \beta X)^2$$

达到最小的预测式。

若 $\text{var}(X) > 0$, 则最优系数为

$$\beta = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\text{var}(X)}, \quad \alpha = EY - \beta EX.$$

因此最佳线性预测为

$$\hat{Y} = EY + \frac{\text{cov}(X, Y)}{\text{var}(X)}(X - EX).$$

本题中

$$EX = EY = 0, \quad \frac{\text{cov}(X, Y)}{\text{var}(X)} = b,$$

所以

$$\hat{Y} = bX.$$

5. (10 分) 某部电梯只负责将地面乘客送到地上各楼层, 且在地面之上有 N 个楼层 (不包括地面)。假设从地面上电梯的人数是均值为 10 的 Poisson 分布的随机变量, 且每个进入电梯的人独立地、等可能地选取一个楼层下电梯。又假设电梯只有在有乘客下电梯时才停 (地面之上没有上电梯的乘客)。求电梯在卸载所有乘客前期望停的次数 (不包括地面)。

解:

设上电梯人数为 $M \sim P(10)$, 电梯停的次数为 T 。先固定 $M = k$ 。

此时第 i 层没人下的概率为

$$\left(1 - \frac{1}{N}\right)^k,$$

所以第 i 层有人下的概率为

$$1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^k.$$

故

$$E(T | M = k) = N \left[1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^k\right].$$

由全期望公式,

$$\begin{aligned} ET &= \sum_{k=0}^{\infty} E(T | M = k) P(M = k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} N \left[1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^k\right] e^{-10} \frac{10^k}{k!} \\ &= N \left[1 - e^{-10} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(10(1 - \frac{1}{N}))^k}{k!}\right] \\ &= N (1 - e^{-10/N}). \end{aligned}$$

所以电梯在卸载所有乘客前期望停的次数为

$$\boxed{N (1 - e^{-10/N})}.$$

6. (10 分) 假设 $X_n, n \geq 1$, 是独立同分布的随机变量, 且均值为 0, 方差有限。令

$$S_n = \sum_{k=1}^n X_k.$$

证明: 对任意 $p > 1/2$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时,

$$\frac{S_n}{n^p} \xrightarrow{P} 0.$$

证明:

设 $\text{var}(X_1) = \sigma^2 < \infty$ 。由于 X_k 独立同分布且 $EX_k = 0$, 有

$$ES_n = 0, \quad \text{var}(S_n) = n\sigma^2.$$

对任意 $\varepsilon > 0$, 由 Chebyshev 不等式,

$$\begin{aligned} P\left(\left|\frac{S_n}{n^p}\right| > \varepsilon\right) &\leq \frac{\text{var}(S_n)}{\varepsilon^2 n^{2p}} \\ &= \frac{n\sigma^2}{\varepsilon^2 n^{2p}} = \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2 n^{2p-1}} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

因为 $p > 1/2$, 所以 $2p - 1 > 0$ 。故

$$\frac{S_n}{n^p} \xrightarrow{P} 0.$$

7. (15 分)

(1) 假设 $X_2, X_3, \dots, X_n, \dots$ 是定义在同一个概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上的独立随机变量列, 满足:

$$P(X_n = n) = P(X_n = -n) = \frac{1}{2n\sqrt{\log n}}, \quad P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n\sqrt{\log n}}.$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时,

$$n^{-1} \sum_{i=2}^n X_i$$

是否依概率收敛? 为什么?

(2) 假设 $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ 是定义在同一个概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上的独立随机变量列, 满足: 其中 $\beta > 1$,

$$P(X_n = n) = P(X_n = -n) = \frac{1}{2}n^{-\beta}, \quad P(X_n = 0) = 1 - n^{-\beta}.$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时,

$$n^{-1} \sum_{i=2}^n X_i$$

是否几乎处处收敛? 为什么?

解:

(1) 依概率收敛到 0。因为

$$EX_i = 0, \quad \text{var}(X_i) = EX_i^2 = i^2 \cdot \frac{1}{i\sqrt{\log i}} = \frac{i}{\sqrt{\log i}}.$$

由独立性,

$$\text{var}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=2}^n X_i\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=2}^n \frac{i}{\sqrt{\log i}} \leq \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n^2}{\sqrt{\log 2}} < \infty,$$

更精确地,

$$\frac{1}{n^2} \sum_{i=2}^n \frac{i}{\sqrt{\log i}} \sim \frac{1}{2\sqrt{\log n}} \rightarrow 0.$$

于是由 Chebyshev 不等式, 对任意 $\varepsilon > 0$,

$$P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{i=2}^n X_i\right| > \varepsilon\right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \text{var}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=2}^n X_i\right) \rightarrow 0.$$

故

$$\frac{1}{n} \sum_{i=2}^n X_i \xrightarrow{P} 0.$$

(2) 几乎处处收敛到 0。因为

$$P(X_n \neq 0) = n^{-\beta},$$

且 $\beta > 1$, 所以

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(X_n \neq 0) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\beta} < \infty.$$

由 Borel-Cantelli 引理,

$$P(X_n \neq 0 \text{ i.o.}) = 0.$$

因此几乎处处地, 只有有限多个 $X_n \neq 0$, 从而

$$\sum_{i=2}^n X_i$$

最终为常数。于是

$$\frac{1}{n} \sum_{i=2}^n X_i \rightarrow 0, \quad a.s.$$

8. (15 分) 用概率方法证明: 对任意 $x, y > 0$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时,

$$\sum_{k=0}^{\lfloor nx \rfloor} e^{-ny} \frac{(ny)^k}{k!} \rightarrow \begin{cases} 0, & x < y, \\ \frac{1}{2}, & x = y, \\ 1, & x > y. \end{cases}$$

证明:

设

$$X_1, X_2, \dots \stackrel{i.i.d.}{\sim} P(y), \quad S_n = \sum_{i=1}^n X_i.$$

则由 Poisson 分布的可加性,

$$S_n \sim P(ny).$$

所以

$$\sum_{k=0}^{\lfloor nx \rfloor} e^{-ny} \frac{(ny)^k}{k!} = P(S_n \leq \lfloor nx \rfloor).$$

又

$$EX_1 = y, \quad \text{var}(X_1) = y.$$

由中心极限定理,

$$\frac{S_n - ny}{\sqrt{ny}} \xrightarrow{d} N(0, 1).$$

因此

$$P(S_n \leq \lfloor nx \rfloor) = P\left(\frac{S_n - ny}{\sqrt{ny}} \leq \frac{\lfloor nx \rfloor - ny}{\sqrt{ny}}\right).$$

记

$$a_n = \frac{\lfloor nx \rfloor - ny}{\sqrt{ny}}.$$

若 $x < y$, 则 $a_n \rightarrow -\infty$, 故

$$P(S_n \leq \lfloor nx \rfloor) \rightarrow 0.$$

若 $x > y$, 则 $a_n \rightarrow +\infty$, 故

$$P(S_n \leq \lfloor nx \rfloor) \rightarrow 1.$$

若 $x = y$, 则

$$a_n = \frac{\lfloor ny \rfloor - ny}{\sqrt{ny}} \rightarrow 0,$$

故

$$P(S_n \leq \lfloor ny \rfloor) \rightarrow \Phi(0) = \frac{1}{2}.$$

综上,

$$\sum_{k=0}^{\lfloor nx \rfloor} e^{-ny} \frac{(ny)^k}{k!} \rightarrow \begin{cases} 0, & x < y, \\ \frac{1}{2}, & x = y, \\ 1, & x > y. \end{cases}$$

11 2020 年期末考题

- (15 分) 假设盒子里有 r 个红球, b 个蓝球, 其中 $r, b \geq 3$ 。现从中抽取两个球扔掉, 然后再从剩下的 $r + b - 2$ 个球中抽取第 3 个球。
 - 建立古典概型描述以上随机试验, 即, 写出样本空间;
 - 求第 3 个球是红球的概率;
 - 若观察发现第 3 个球是红球, 求扔掉的两个球都是蓝球的概率。

- (15 分) 假设 X_1, X_2, X_3 相互独立, 且都服从参数为 1 的指数分布。

- 求 $P(X_3 > \max(X_1, X_2))$;
- 记

$$U = X_1 + X_2, \quad V = X_1 + X_3, \quad W = X_2 + X_3.$$

求 (U, V, W) 的联合概率密度函数; 并判断 U, V, W 是否相互独立 (须说明理由)。

- (15 分) 假设

$$X = e^{a+bZ},$$

其中 $Z \sim N(0, 1)$, a, b 是实数, 且 $b \neq 0$ 。

- 写出 Z 的概率密度函数;
 - 计算 X 的均值与方差。
- (10 分) 假设随机向量 (X, Y) 的联合概率密度函数为

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{4ah}, & -a + bx < y < a + bx, \quad -h < x < h, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

其中 $a, b, h > 0$ 。

- 求条件密度 $p_{Y|X}(y | x)$;
 - 求 Y 关于 X 的最佳预测。
- (10 分) 假设 $X_1, X_2, \dots$ 独立同分布, 方差 $\sigma^2 \in (0, \infty)$ 。记

$$Y_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i.$$

- 求 $\text{Cov}(X_i - Y_n, Y_n)$, 其中 $1 \leq i \leq n$;
 - 举例说明存在一个共同的分布, 使得: 对任意满足 $1 \leq i \leq n$ 的 n 和 i , 都有 $X_i - Y_n$ 与 Y_n 相互独立。
- (10 分) 假设 X 服从泊松分布, 参数 $\lambda > 0$ 。写出 X 的分布列, 并求 X 的母函数。
 - (5 分) 假设 $X_1, X_2, \dots$ 相互独立, 且

$$P(X_k = 1) = 1 - P(X_k = 0) = p_k.$$

其中 $p_k \in (0, 1)$, $\forall k \geq 1$ 。令

$$S_n = \sum_{k=1}^n X_k.$$

证明:

$$\frac{S_n - ES_n}{n} \xrightarrow{P} 0.$$

- (10 分) 已知某药物有效率为 80%。随机选取 100 位病人服用此药, 推导这些病人中药物有效比例在 85% 以上的概率的近似值。标准正态分布的分布函数表:

$$\Phi(1) = 0.84, \quad \Phi(1.25) = 0.89, \quad \Phi(1.5) = 0.93, \quad \Phi(1.75) = 0.96, \quad \Phi(2) = 0.98.$$

- (10 分)
 - 叙述几乎必然收敛的定义;
 - 叙述 Borel-Cantelli 引理。

12 2020 年期末题解答部分

1. (15 分) 假设盒子里有 r 个红球, b 个蓝球, 其中 $r, b \geq 3$. 现从中抽取两个球扔掉, 然后再从剩下的 $r + b - 2$ 个球中抽取第 3 个球。

- (1) 建立古典概型描述以上随机试验, 即, 写出样本空间;
- (2) 求第 3 个球是红球的概率;
- (3) 若观察发现第 3 个球是红球, 求扔掉的两个球都是蓝球的概率。

解答 记 $N = r + b$. 将盒中所有球编号为

$$R_1, \dots, R_r, \quad B_1, \dots, B_b.$$

- (1) 设前两个被扔掉的球组成集合 D , 第 3 个被抽到的球为 z . 则样本空间可写为

$$\Omega = \{(D, z) : D \subseteq \{R_1, \dots, R_r, B_1, \dots, B_b\}, |D| = 2, z \notin D\}.$$

其中每个样本点等可能, 且

$$|\Omega| = \binom{N}{2}(N-2).$$

- (2) 设事件 $A = \{\text{第 3 个球是红球}\}$. 若第 3 个球指定为某一个红球, 则前两个扔掉的球可从其余 $N - 1$ 个球中任取 2 个, 所以

$$|A| = r \binom{N-1}{2}.$$

因此

$$P(A) = \frac{r \binom{N-1}{2}}{\binom{N}{2}(N-2)} = \frac{r}{N} = \frac{r}{r+b}.$$

- (3) 设事件 $C = \{\text{扔掉的两个球都是蓝球}\}$. 要求

$$P(C | A) = \frac{P(CA)}{P(A)}.$$

在事件 CA 中, 第 3 个球为红球, 有 r 种选法; 扔掉的两个球都是蓝球, 有 $\binom{b}{2}$ 种选法, 所以

$$|CA| = r \binom{b}{2}.$$

又由上一问,

$$|A| = r \binom{N-1}{2}.$$

因此

$$P(C | A) = \frac{r \binom{b}{2}}{r \binom{N-1}{2}} = \frac{\binom{b}{2}}{\binom{r+b-1}{2}} = \frac{b(b-1)}{(r+b-1)(r+b-2)}.$$

2. (15 分) 假设 X_1, X_2, X_3 相互独立, 且都服从参数为 1 的指数分布。

- (1) 求 $P(X_3 > \max(X_1, X_2))$;
- (2) 记

$$U = X_1 + X_2, \quad V = X_1 + X_3, \quad W = X_2 + X_3.$$

求 (U, V, W) 的联合概率密度函数; 并判断 U, V, W 是否相互独立 (须说明理由)。

解答

- (1) 因为 X_1, X_2, X_3 独立同分布, 且指数分布为连续型分布, 所以三者取最大值的概率相同, 并且并列取最大值的概率为 0. 因此

$$P(X_3 > \max(X_1, X_2)) = \frac{1}{3}.$$

- (2) 由

$$U = X_1 + X_2, \quad V = X_1 + X_3, \quad W = X_2 + X_3,$$

反解得

$$X_1 = \frac{U + V - W}{2}, \quad X_2 = \frac{U + W - V}{2}, \quad X_3 = \frac{V + W - U}{2}.$$

因为 $X_1, X_2, X_3 > 0$, 所以

$$u + v > w, \quad u + w > v, \quad v + w > u.$$

又

$$x_1 + x_2 + x_3 = \frac{u + v + w}{2}.$$

计算雅可比行列式:

$$\left| \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(u, v, w)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}.$$

因此 (U, V, W) 的联合概率密度函数为

$$f_{U,V,W}(u, v, w) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-\frac{u+v+w}{2}}, & u+v > w, u+w > v, v+w > u, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

下面判断独立性。由于

$$U = X_1 + X_2, \quad V = X_1 + X_3,$$

有

$$\text{Cov}(U, V) = \text{Cov}(X_1 + X_2, X_1 + X_3) = \text{Var}(X_1) = 1.$$

若 U, V, W 相互独立, 则特别地 U 与 V 独立, 从而应有

$$\text{Cov}(U, V) = 0,$$

这与上式矛盾。因此 U, V, W 不相互独立。

3. (15 分) 假设

$$X = e^{a+bZ},$$

其中 $Z \sim N(0, 1)$, a, b 是实数, 且 $b \neq 0$ 。

(1) 写出 Z 的概率密度函数;

(2) 计算 X 的均值与方差。

解答

(1) 因为 $Z \sim N(0, 1)$, 所以 Z 的概率密度函数为

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}, \quad -\infty < z < +\infty.$$

(2) 由

$$X = e^{a+bZ},$$

得

$$EX = E(e^{a+bZ}) = e^a E(e^{bZ}).$$

由于标准正态分布的矩母函数为

$$E(e^{tZ}) = e^{\frac{t^2}{2}},$$

所以

$$EX = e^a e^{\frac{b^2}{2}} = e^{a+\frac{b^2}{2}}.$$

又

$$EX^2 = E(e^{2a+2bZ}) = e^{2a} E(e^{2bZ}) = e^{2a} e^{\frac{(2b)^2}{2}} = e^{2a+2b^2}.$$

因此

$$\text{Var}(X) = EX^2 - (EX)^2 = e^{2a+2b^2} - e^{2a+b^2}.$$

即

$$\text{Var}(X) = e^{2a+b^2} (e^{b^2} - 1).$$

4. (10 分) 假设随机向量 (X, Y) 的联合概率密度函数为

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{4ah}, & -a + bx < y < a + bx, \quad -h < x < h, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

其中 $a, b, h > 0$ 。

- (1) 求条件密度 $p_{Y|X}(y|x)$;
 (2) 求 Y 关于 X 的最佳预测。

解答

- (1) 先求 X 的边缘密度。若 $-h < x < h$, 则

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \int_{-a+bx}^{a+bx} \frac{1}{4ah} dy = \frac{2a}{4ah} = \frac{1}{2h}.$$

因此

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2h}, & -h < x < h, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

所以当 $-h < x < h$ 时,

$$p_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)} = \begin{cases} \frac{1}{2a}, & -a+bx < y < a+bx, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

- (2) Y 关于 X 的最佳预测为条件期望

$$E(Y|X=x).$$

由上一问可知, 在给定 $X=x$ 时,

$$Y|X=x \sim U(-a+bx, a+bx).$$

因此

$$E(Y|X=x) = \frac{(-a+bx) + (a+bx)}{2} = bx.$$

所以

$$E(Y|X) = bX.$$

即 Y 关于 X 的最佳预测为

$$\boxed{bX}.$$

注: 最佳预测与最佳线性预测的区别.

注意到上一套题的第四题是“最佳线性预测”, 这题是“最佳预测”:

在均方误差意义下, Y 关于 X 的最佳预测是

$$E(Y|X).$$

它表示在所有 X 的函数 $g(X)$ 中, 使

$$E(Y - g(X))^2$$

最小的那个预测量。

而 Y 关于 X 的最佳线性预测, 是只在所有形如

$$\alpha + \beta X$$

的线性函数中寻找最优预测量。当 $\text{Var}(X) > 0$ 时, 它为

$$EY + \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\text{Var}(X)}(X - EX).$$

因此一般有

$$E(Y|X) \neq EY + \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\text{Var}(X)}(X - EX).$$

前者是在所有函数中最优, 后者只在线性函数中最优。

特别地, 如果 $E(Y|X)$ 本身就是 X 的线性函数, 则二者相同。本题中

$$E(Y|X) = bX,$$

所以最佳预测与最佳线性预测恰好一致。

5. (10 分) 假设 $X_1, X_2, \dots$ 独立同分布, 方差 $\sigma^2 \in (0, \infty)$ 。记

$$Y_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i.$$

(1) 求 $\text{Cov}(X_i - Y_n, Y_n)$, 其中 $1 \leq i \leq n$;

(2) 举例说明存在一个共同的分布, 使得: 对任意满足 $1 \leq i \leq n$ 的 n 和 i , 都有 $X_i - Y_n$ 与 Y_n 相互独立。

解答

(1) 由

$$\text{Cov}(X_i, Y_n) = \text{Cov}\left(X_i, \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j\right) = \frac{\sigma^2}{n}, \quad \text{Var}(Y_n) = \frac{\sigma^2}{n},$$

得

$$\text{Cov}(X_i - Y_n, Y_n) = \text{Cov}(X_i, Y_n) - \text{Var}(Y_n) = 0.$$

(2) 取

$$X_1, X_2, \dots \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} N(0, \sigma^2).$$

则 $X_i - Y_n$ 与 Y_n 是正态随机变量组的线性组合, 故联合服从二维正态分布。又由第 (1) 问知

$$\text{Cov}(X_i - Y_n, Y_n) = 0.$$

二维正态分布中, 不相关等价于独立, 所以

$$X_i - Y_n \text{ 与 } Y_n$$

相互独立。

6. (10 分) 假设 X 服从泊松分布, 参数 $\lambda > 0$ 。写出 X 的分布列, 并求 X 的母函数。

解答 由 $X \sim P(\lambda)$, 得

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

其概率母函数为

$$G_X(s) = E(s^X) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda s)^k}{k!} = e^{\lambda(s-1)}.$$

7. (5 分) 假设 $X_1, X_2, \dots$ 相互独立, 且

$$P(X_k = 1) = 1 - P(X_k = 0) = p_k,$$

其中 $p_k \in (0, 1)$, $\forall k \geq 1$ 。令

$$S_n = \sum_{k=1}^n X_k.$$

证明:

$$\frac{S_n - ES_n}{n} \xrightarrow{P} 0.$$

解答 因为 X_k 相互独立, 且 $X_k \sim B(1, p_k)$, 所以

$$\text{Var}(S_n) = \sum_{k=1}^n \text{Var}(X_k) = \sum_{k=1}^n p_k(1 - p_k) \leq \frac{n}{4}.$$

由 Chebyshev 不等式, 对任意 $\varepsilon > 0$,

$$P\left(\left|\frac{S_n - ES_n}{n}\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\text{Var}(S_n)}{n^2 \varepsilon^2} \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2} \rightarrow 0.$$

因此

$$\frac{S_n - ES_n}{n} \xrightarrow{P} 0.$$

8. (10 分) 已知某药物有效率为 80%。随机选取 100 位病人服用此药, 推导这些病人中药物有效比例在 85% 以上的概率的近似值。标准正态分布的分布函数表:

$$\Phi(1) = 0.84, \quad \Phi(1.25) = 0.89, \quad \Phi(1.5) = 0.93, \quad \Phi(1.75) = 0.96, \quad \Phi(2) = 0.98.$$

解答 设 X 表示 100 位病人中药物有效的人数, 则

$$X \sim B(100, 0.8).$$

于是

$$EX = 80, \quad \text{Var}(X) = 100 \times 0.8 \times 0.2 = 16.$$

所求概率为

$$P\left(\frac{X}{100} \geq 0.85\right) = P(X \geq 85) = P\left(\frac{X - 80}{4} \geq \frac{85 - 80}{4}\right).$$

由中心极限定理近似得

$$P(X \geq 85) \approx 1 - \Phi(1.25) = 1 - 0.89 = 0.11.$$

因此近似概率为

$$\boxed{0.11}.$$

9. (10 分)

- (1) 叙述几乎必然收敛的定义;
- (2) 叙述 Borel-Cantelli 引理。

解答

- (1) 若

$$P(\{\omega : X_n(\omega) \rightarrow X(\omega)\}) = 1,$$

则称 X_n 几乎必然收敛于 X , 记作

$$X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X.$$

- (2) 设 $A_1, A_2, \dots$ 为一列事件, 记

$$A_n \text{ i.o.} = \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} A_n.$$

Borel-Cantelli 引理如下:

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty \implies P(A_n \text{ i.o.}) = 0.$$

若进一步 $A_1, A_2, \dots$ 相互独立, 则

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty \implies P(A_n \text{ i.o.}) = 1.$$

13 2023 年秋季期末考题

1. (10 分) 设 $X_1, X_2, \dots, X_{100}$ 独立且服从 $B(1, \frac{1}{2})$, $Y = X_1 + X_2 + \dots + X_{100}$ 。试用标准正态分布函数 $\Phi(x)$ ($x > 0$) 估计

$$P(48 \leq Y \leq 52).$$

2. (10 分) 设 X_1, X_2 独立且服从指数分布 $\text{Exp}(\frac{1}{2})$, 求

$$\frac{1}{2}(X_1 - X_2)$$

的密度函数。

3. (10 分) 设在 n 次独立重复实验中每次的结果都为 $1, 2, \dots, k$ 中的一个, 且取到每种结果的概率分别为 $p_1, p_2, \dots, p_k$ 。记 N_i 为 n 次实验中 i 出现的次数, $j \neq i$, 求

$$E(N_j | N_i > 0).$$

4. (15 分) 设 $X_1, X_2, \dots$ 独立且服从参数为 1 的泊松分布,

$$W_n = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \dots + X_n).$$

- (1) 求

$$Y_n = \sqrt{n}(W_n - 1)$$

的特征函数;

- (2) 证明存在 Y 使得 $Y_n \xrightarrow{d} Y$, 并指出 Y 服从什么分布。

5. (15 分) 设 $f_1(x, y), f_2(x, y)$ 都是二元正态分布的密度函数, 且两个边缘的期望均为 0, 方差均为 1, $f_1(x, y), f_2(x, y)$ 的两个边缘的相关系数分别为 $\rho, -\rho$ 。设 (X, Y) 的密度函数为

$$\frac{1}{2}(f_1(x, y) + f_2(x, y)).$$

- (1) 证明 $X \sim N(0, 1), Y \sim N(0, 1)$;

- (2) 求 X, Y 的相关系数;

- (3) X, Y 是否独立? 为什么?

6. (10 分) 设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 独立同分布, 证明

$$\frac{X_n}{n} \xrightarrow{\text{a.s.}} 0$$

当且仅当

$$E|X| < \infty.$$

7. (10 分) 设 $X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X$, 且存在 $M > 0$ 使得

$$EX^2 < M, \quad EX_n^2 < M, \quad \forall n.$$

证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} EX_n = EX.$$

8. (10 分) 设 f 是 $[-1, 1]$ 上的连续函数, 求

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} \int_{-1}^1 \dots \int_{-1}^1 f\left(\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}\right) dx_1 dx_2 \dots dx_n.$$

9. (10 分) 设事件 A, B 满足

$$P(A) = a \in (0, 1), \quad P(B) = b, \quad P(AB) = p,$$

$X = \mathbf{1}_A, Y = \mathbf{1}_B$ 。

- (1) 证明 X 的任意函数均可以在几乎处处的意义下表示成

$$c_1 \mathbf{1}_A + c_2 \mathbf{1}_{A^c}$$

的形式, 其中 $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ 。

- (2) 在 X 的线性函数中找 Y 的最优预测 $\hat{Y}$, 并计算

$$E(Y - \hat{Y})^2.$$

14 2023 年秋期末题解答部分

1. (10 分) 设 $X_1, X_2, \dots, X_{100}$ 独立且服从 $B(1, \frac{1}{2})$, $Y = X_1 + X_2 + \dots + X_{100}$ 。试用标准正态分布函数 $\Phi(x)$ ($x > 0$) 估计

$$P(48 \leq Y \leq 52).$$

解: $Y \sim B(100, \frac{1}{2})$, 故 $EY = 50$, $DY = 25$ 。由中心极限定理,

$$P(48 \leq Y \leq 52) \approx P\left(\frac{48-50}{5} \leq Z \leq \frac{52-50}{5}\right) = P\left(-\frac{2}{5} \leq Z \leq \frac{2}{5}\right).$$

因此

$$P(48 \leq Y \leq 52) \approx 2\Phi\left(\frac{2}{5}\right) - 1.$$

【注意】: 如果考虑连续性修正, 答案如下:

解: $Y \sim B(100, \frac{1}{2})$, 故 $EY = 50$, $DY = 25$ 。由中心极限定理及连续性修正,

$$P(48 \leq Y \leq 52) \approx P\left(\frac{47.5-50}{5} \leq Z \leq \frac{52.5-50}{5}\right) = 2\Phi\left(\frac{1}{2}\right) - 1.$$

$$P(48 \leq Y \leq 52) \approx 2\Phi\left(\frac{1}{2}\right) - 1$$

2. (10 分) 设 X_1, X_2 独立且服从指数分布 $\text{Exp}(\frac{1}{2})$, 求

$$\frac{1}{2}(X_1 - X_2)$$

的密度函数。

解: 设

$$Y = \frac{1}{2}(X_1 - X_2), \quad U = X_1,$$

Jacobian 为

$$\left| \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(u, y)} \right| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 2.$$

又 X_1, X_2 独立且均服从 $\text{Exp}(\frac{1}{2})$, 所以

$$f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = \frac{1}{4}e^{-\frac{x_1+x_2}{2}}, \quad x_1 > 0, x_2 > 0.$$

因此

$$f_{U,Y}(u, y) = \frac{1}{4}e^{-\frac{u+u-2y}{2}} \cdot 2 = \frac{1}{2}e^{-u+y},$$

其中区域为

$$u > 0, \quad u - 2y > 0,$$

即

$$u > \max\{0, 2y\}.$$

于是

$$f_Y(y) = \int_{\max\{0, 2y\}}^{+\infty} \frac{1}{2}e^{-u+y} du.$$

当 $y < 0$ 时,

$$f_Y(y) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2}e^{-u+y} du = \frac{1}{2}e^y.$$

当 $y \geq 0$ 时,

$$f_Y(y) = \int_{2y}^{+\infty} \frac{1}{2}e^{-u+y} du = \frac{1}{2}e^{-y}.$$

所以

$$f_Y(y) = \frac{1}{2}e^{-|y|}, \quad -\infty < y < +\infty.$$

3. (10 分) 设在 n 次独立重复实验中每次的结果都为 $1, 2, \dots, k$ 中的一个, 且取到每种结果的概率分别为 $p_1, p_2, \dots, p_k$. 记 N_i 为 n 次实验中 i 出现的次数, $j \neq i$, 求

$$E(N_j | N_i > 0).$$

解: 由条件期望定义,

$$E(N_j | N_i > 0) = \frac{E(N_j \mathbf{1}_{\{N_i > 0\}})}{P(N_i > 0)}.$$

其中

$$P(N_i > 0) = 1 - (1 - p_i)^n.$$

又

$$E(N_j \mathbf{1}_{\{N_i = 0\}}) = np_j(1 - p_i)^{n-1},$$

所以

$$E(N_j \mathbf{1}_{\{N_i > 0\}}) = EN_j - E(N_j \mathbf{1}_{\{N_i = 0\}}) = np_j[1 - (1 - p_i)^{n-1}].$$

故

$$E(N_j | N_i > 0) = \frac{np_j[1 - (1 - p_i)^{n-1}]}{1 - (1 - p_i)^n}.$$

4. (15 分) 设 $X_1, X_2, \dots$ 独立且服从参数为 1 的泊松分布,

$$W_n = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \dots + X_n).$$

- (1) 求

$$Y_n = \sqrt{n}(W_n - 1)$$

的特征函数;

- (2) 证明存在 Y 使得 $Y_n \xrightarrow{d} Y$, 并指出 Y 服从什么分布。

解:

- (1) 记 $S_n = X_1 + \dots + X_n$, 则

$$Y_n = \frac{S_n - n}{\sqrt{n}}.$$

因为 $X_i \sim P(1)$, 其特征函数为

$$\varphi_X(t) = \exp(e^{it} - 1),$$

所以

$$\varphi_{Y_n}(t) = E \exp \left\{ it \frac{S_n - n}{\sqrt{n}} \right\} = e^{-it\sqrt{n}} \left[\exp \left(e^{it/\sqrt{n}} - 1 \right) \right]^n.$$

因此

$$\varphi_{Y_n}(t) = \exp \left\{ n \left(e^{it/\sqrt{n}} - 1 - \frac{it}{\sqrt{n}} \right) \right\}.$$

- (2) 由 Taylor 展开,

$$e^{it/\sqrt{n}} = 1 + \frac{it}{\sqrt{n}} - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

故

$$n \left(e^{it/\sqrt{n}} - 1 - \frac{it}{\sqrt{n}} \right) \longrightarrow -\frac{t^2}{2}.$$

于是

$$\varphi_{Y_n}(t) \longrightarrow e^{-t^2/2}.$$

而 $e^{-t^2/2}$ 是标准正态分布 $N(0, 1)$ 的特征函数, 由连续性定理,

$$Y_n \xrightarrow{d} Y, \quad Y \sim N(0, 1).$$

5. (15 分) 设 $f_1(x, y), f_2(x, y)$ 都是二元正态分布的密度函数, 且两个边缘的期望均为 0, 方差均为 1, $f_1(x, y), f_2(x, y)$ 的两个边缘的相关系数分别为 $\rho, -\rho$ 。设 (X, Y) 的密度函数为

$$\frac{1}{2}(f_1(x, y) + f_2(x, y)).$$

- (1) 证明 $X \sim N(0, 1), Y \sim N(0, 1)$;
 (2) 求 X, Y 的相关系数;
 (3) X, Y 是否独立? 为什么?

解:

- (1) 由于 f_1, f_2 的两个边缘分布均为 $N(0, 1)$, 故

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2}(f_1(x, y) + f_2(x, y)) dy = \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2}\varphi(x) = \varphi(x),$$

其中 $\varphi(x)$ 为标准正态密度函数。所以

$$X \sim N(0, 1).$$

同理

$$Y \sim N(0, 1).$$

- (2) 由第 (1) 问知

$$EX = EY = 0, \quad DX = DY = 1.$$

又因为 f_1, f_2 对应的相关系数分别为 $\rho, -\rho$, 由题意,

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{2}(f_1(x, y) + f_2(x, y)).$$

因此

$$EXY = \iint xy f_{X,Y}(x, y) dxdy = \frac{1}{2} \iint xy f_1(x, y) dxdy + \frac{1}{2} \iint xy f_2(x, y) dxdy.$$

对于 f_1 , 其两个边缘期望为 0, 方差为 1, 相关系数为 ρ , 故

$$\iint xy f_1(x, y) dxdy = \rho.$$

同理, 对于 f_2 , 有

$$\iint xy f_2(x, y) dxdy = -\rho.$$

于是

$$EXY = \frac{1}{2}\rho + \frac{1}{2}(-\rho) = 0.$$

又由第 (1) 问知 $EX = EY = 0, DX = DY = 1$, 故

$$\boxed{\text{Corr}(X, Y) = 0.}$$

- (3) 当 $\rho = 0$ 时, f_1, f_2 都是两个独立标准正态变量的联合密度, 因此 X, Y 独立。
 当 $\rho \neq 0$ 时,

$$f(x, y) = \frac{1}{4\pi\sqrt{1-\rho^2}} \left[e^{-\frac{x^2-2\rho xy+y^2}{2(1-\rho^2)}} + e^{-\frac{x^2+2\rho xy+y^2}{2(1-\rho^2)}} \right].$$

若 X, Y 独立, 则应有

$$f(x, y) = f_X(x)f_Y(y) = \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}.$$

但当 $\rho \neq 0$ 时, 上式一般不成立, 例如在 $(0, 0)$ 处两边分别为

$$f(0, 0) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}, \quad f_X(0)f_Y(0) = \frac{1}{2\pi}.$$

二者不相等, 故 X, Y 不独立。

综上,

$$\boxed{\rho = 0 \text{ 时 } X, Y \text{ 独立; } \rho \neq 0 \text{ 时 } X, Y \text{ 不独立。}}$$

6. (10 分) 设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 独立同分布, 证明

$$\frac{X_n}{n} \xrightarrow{\text{a.s.}} 0$$

当且仅当

$$E|X| < \infty.$$

解: 先证充分性。设 $E|X| < \infty$, 记

$$S_n = X_1 + \dots + X_n.$$

由强大数定律,

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{a.s.}} EX.$$

同时

$$\frac{S_{n-1}}{n-1} \xrightarrow{\text{a.s.}} EX.$$

注意到

$$\frac{X_n}{n} = \frac{S_n}{n} - \frac{n-1}{n} \cdot \frac{S_{n-1}}{n-1},$$

所以

$$\frac{X_n}{n} \xrightarrow{\text{a.s.}} EX - EX = 0.$$

再证必要性。设

$$\frac{X_n}{n} \xrightarrow{\text{a.s.}} 0.$$

则

$$P(|X_n| > n \text{ i.o.}) = 0.$$

令

$$A_n = \{|X_n| > n\}.$$

由于 $X_1, X_2, \dots$ 相互独立, 所以 $A_1, A_2, \dots$ 相互独立。由 Borel-Cantelli 引理的逆命题,

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty.$$

即

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n| > n) < \infty.$$

又因 X_n 与 X 同分布, 所以

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X| > n) < \infty.$$

下面证明 $E|X| < \infty$ 。对任意 $x \geq 0$, 有

$$x \leq 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{x > n\}}.$$

取 $x = |X|$, 得

$$|X| \leq 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{|X| > n\}}.$$

两边取期望,

$$E|X| \leq 1 + \sum_{n=1}^{\infty} P(|X| > n) < \infty.$$

故

$$E|X| < \infty.$$

综上,

$$\boxed{\frac{X_n}{n} \xrightarrow{\text{a.s.}} 0 \iff E|X| < \infty.}$$

7. (10 分) 设 $X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X$, 且存在 $M > 0$ 使得

$$EX^2 < M, \quad EX_n^2 < M, \quad \forall n.$$

证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} EX_n = EX.$$

思路: 若只知道 $X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X$, 一般不能推出 $EX_n \rightarrow EX$, 因为极限可以和期望交换需要额外条件控制随机变量的尾部。“控制尾部”里的“尾部”, 指的是随机变量取特别大的值的那一部分, 是违背有界收敛定理的因素。

题目给出 $EX_n^2 < M, EX^2 < M$, 就是为了控制尾部。具体来说, 当 $|X_n| > K$ 时, 有 $|X_n| \leq \frac{X_n^2}{K}$, 因此

$$E(|X_n| \mathbf{1}_{\{|X_n| > K\}}) \leq \frac{EX_n^2}{K} \leq \frac{M}{K}.$$

这说明 X_n 的“大尾巴”可以被统一控制住。

所以证明时先把 X_n 截断成有界变量 $g_K(X_n)$ 。对于有界部分, $g_K(X_n) \xrightarrow{\text{a.s.}} g_K(X)$, 可以用有界收敛定理推出 $Eg_K(X_n) \rightarrow Eg_K(X)$ 。剩下的尾部再用二阶矩估计压掉。最后令 $K \rightarrow \infty$, 就得到 $EX_n \rightarrow EX$ 。

证明: 对 $K > 0$, 定义截断函数

$$g_K(x) = \begin{cases} -K, & x < -K, \\ x, & |x| \leq K, \\ K, & x > K. \end{cases}$$

由于 $X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X$, 且 g_K 有界连续, 故

$$g_K(X_n) \xrightarrow{\text{a.s.}} g_K(X).$$

由有界收敛定理,

$$Eg_K(X_n) \rightarrow Eg_K(X).$$

又

$$|EX_n - EX| \leq |Eg_K(X_n) - Eg_K(X)| + E|X_n - g_K(X_n)| + E|X - g_K(X)|.$$

其中

$$E|X_n - g_K(X_n)| \leq E(|X_n| \mathbf{1}_{\{|X_n| > K\}}) \leq \frac{EX_n^2}{K} < \frac{M}{K},$$

同理

$$E|X - g_K(X)| < \frac{M}{K}.$$

所以

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |EX_n - EX| \leq \frac{2M}{K}.$$

令 $K \rightarrow \infty$, 得

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} EX_n = EX.}$$

注: 本题中用到的有界收敛定理是:

若

$$X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X,$$

且存在常数 $C > 0$, 使得对所有 n 都有

$$|X_n| \leq C,$$

则

$$EX_n \rightarrow EX.$$

8. (10 分) 设 f 是 $[-1, 1]$ 上的连续函数, 求

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} \int_{-1}^1 \cdots \int_{-1}^1 f\left(\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n}\right) dx_1 dx_2 \cdots dx_n.$$

解: 设 $X_1, X_2, \cdots$ 独立同分布, 且 $X_i \sim U[-1, 1]$, 则原式等于

$$Ef\left(\frac{X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2}{n}\right).$$

又

$$EX_1^2 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{1}{3}.$$

由强大数定律,

$$\frac{X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2}{n} \xrightarrow{\text{a.s.}} \frac{1}{3}.$$

因为 f 连续, 所以

$$f\left(\frac{X_1^2 + \cdots + X_n^2}{n}\right) \xrightarrow{\text{a.s.}} f\left(\frac{1}{3}\right).$$

且 f 在 $[-1, 1]$ 上连续, 故有界, 由有界收敛定理得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Ef\left(\frac{X_1^2 + \cdots + X_n^2}{n}\right) = f\left(\frac{1}{3}\right).$$

因此

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} \int_{-1}^1 \cdots \int_{-1}^1 f\left(\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n}\right) dx_1 dx_2 \cdots dx_n = f\left(\frac{1}{3}\right).$$

9. (10 分) 设事件 A, B 满足

$$P(A) = a \in (0, 1), \quad P(B) = b, \quad P(AB) = p,$$

$X = \mathbf{1}_A, Y = \mathbf{1}_B$ 。

(1) 证明 X 的任意函数均可以在几乎处处的意义下表示成

$$c_1 \mathbf{1}_A + c_2 \mathbf{1}_{A^c}$$

的形式, 其中 $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ 。

(2) 在 X 的线性函数中找 Y 的最优预测 $\hat{Y}$, 并计算

$$E(Y - \hat{Y})^2.$$

解:

(1) 因为

$$X = \mathbf{1}_A = \begin{cases} 1, & \omega \in A, \\ 0, & \omega \in A^c, \end{cases}$$

所以对任意函数 g , 有

$$g(X) = g(1)\mathbf{1}_A + g(0)\mathbf{1}_{A^c}.$$

取

$$c_1 = g(1), \quad c_2 = g(0),$$

即得

$$g(X) = c_1 \mathbf{1}_A + c_2 \mathbf{1}_{A^c}.$$

(2) 最优预测为

$$\hat{Y} = E(Y | X).$$

由第 (1) 问, 设

$$\hat{Y} = c_1 \mathbf{1}_A + c_2 \mathbf{1}_{A^c}.$$

在 A 上,

$$c_1 = E(Y | A) = P(B | A) = \frac{p}{a}.$$

在 A^c 上,

$$c_2 = E(Y | A^c) = P(B | A^c) = \frac{P(B) - P(AB)}{P(A^c)} = \frac{b-p}{1-a}.$$

故

$$\hat{Y} = \frac{p}{a}\mathbf{1}_A + \frac{b-p}{1-a}\mathbf{1}_{A^c}.$$

即

$$\hat{Y} = \frac{p}{a}X + \frac{b-p}{1-a}(1-X).$$

又因为 $Y^2 = Y$, 所以

$$E(Y - \hat{Y})^2 = EY^2 - E\hat{Y}^2 = b - \left[a \left(\frac{p}{a} \right)^2 + (1-a) \left(\frac{b-p}{1-a} \right)^2 \right].$$

因此

$$E(Y - \hat{Y})^2 = b - \frac{p^2}{a} - \frac{(b-p)^2}{1-a}.$$

【注】:

本题第 (2) 问也可以直接使用最佳线性预测公式。若在 X 的线性函数中预测 Y , 则

$$\hat{Y} = EY + \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\text{Var}(X)}(X - EX).$$

本题中

$$X = \mathbf{1}_A, \quad Y = \mathbf{1}_B,$$

所以

$$EX = a, \quad EY = b,$$

$$\text{Var}(X) = a(1-a),$$

并且

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - EXEY = P(AB) - P(A)P(B) = p - ab.$$

因此

$$\hat{Y} = b + \frac{p-ab}{a(1-a)}(X-a).$$

又因为 $X = \mathbf{1}_A$, 所以也可以写成

$$\hat{Y} = \frac{p}{a}\mathbf{1}_A + \frac{b-p}{1-a}\mathbf{1}_{A^c}.$$

这与前面用条件期望算出的结果一致。

同时, 最佳线性预测误差满足

$$E(Y - \hat{Y})^2 = \text{Var}(Y) - \frac{\text{Cov}^2(X, Y)}{\text{Var}(X)}.$$

由于

$$\text{Var}(Y) = b(1-b),$$

故

$$E(Y - \hat{Y})^2 = b(1-b) - \frac{(p-ab)^2}{a(1-a)}.$$

这个结果与

$$b - \frac{p^2}{a} - \frac{(b-p)^2}{1-a}$$

是等价的。

15 2024 年春季期末考题

本试卷满分为 105 分，按照 $\min\{\text{卷面成绩}, 100\}$ 计入总评。

1. (15 分) 随机变量 Y 服从参数为 λ 的指数分布。用 $[y]$ 表示不超过 y 的最大整数，随机变量

$$X = Y - [Y], \quad Z = [Y].$$

- (1) 计算 $P(X \leq x, Z = n)$ ，这里 x 是一实数， n 是非负整数；
 - (2) 计算 X 与 Z 的分布；
 - (3) 讨论 X 与 Z 的独立性。
2. (10 分) 随机变量 X_n 依分布收敛于 X ， Y_n 依分布收敛于正常数 c ，证明随机变量 $X_n Y_n$ 依分布收敛于 cX 。
3. (10 分) 证明：随机变量 X 与自身是独立的，当且仅当 X 是几乎处处常值的。
4. (10 分) 随机变量 X_n 独立同分布于参数为 1 的指数分布，给定正实数 α ，证明

$$P(X_n > \alpha \ln n \text{ i.o.}) = \begin{cases} 1, & 0 < \alpha \leq 1, \\ 0, & \alpha > 1. \end{cases}$$

5. (20 分) 设 $X_1, X_2, \dots$ 是独立同分布的随机变量，令

$$S_n = X_1 + \dots + X_n.$$

- (1) 若 $\mu = EX_1 > 0$ ，证明对 $\alpha < 1$ ，

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(S_n \geq n^\alpha) = 1;$$

- (2) 若 $\mu = EX_1 = 0$ ， $EX_1^2 < \infty$ ，计算

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(S_n \geq n^\alpha).$$

6. (10 分) 某城市有 10000 名市民与两个剧院，每个剧院有 x 个座位，每个市民独立等可能地选择一个剧院看戏。若希望“某个市民来到剧院后因为没有座位不得不放弃看戏”的概率不超过 0.01，计算 x 的最小值。

参考数据：

$$\Phi(2.05) = 0.98, \quad \Phi(2.17) = 0.985, \quad \Phi(2.33) = 0.99, \quad \Phi(2.58) = 0.995,$$

Φ 是标准正态函数。

7. (15 分) 对随机变量 X, Y ，定义

$$d(X, Y) = E \frac{|X - Y|}{1 + |X - Y|}.$$

- (1) 证明 d 定义了随机变量之间的一个距离，或曰 d 满足正定性、对称性、三角不等式；
- (2) 证明随机变量 X_n 依概率收敛于 X 当且仅当

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(X_n, X) = 0.$$

8. (15 分)

- (1) 随机向量

$$\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)^T$$

服从正态分布，对任意的 $k \neq j$ ，

$$E(Y_k | Y_j) = 0, \quad E(Y_k^2 | Y_j) = 1.$$

计算 $\mathbf{Y}$ 的密度函数。

- (2) 随机向量

$$\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)^T$$

服从期望为 0 的正态分布，且

$$E(X_1^2 | X_2) = X_2^2.$$

计算

$$E \frac{X_1^2 + X_2^2}{X_2^2 + X_3^2}.$$

16 2024 年春季期末题解答部分

1. (15 分) 随机变量 Y 服从参数为 λ 的指数分布。用 $[y]$ 表示不超过 y 的最大整数, 随机变量

$$X = Y - [Y], \quad Z = [Y].$$

(1) 计算 $P(X \leq x, Z = n)$, 这里 x 是一实数, n 是非负整数;

(2) 计算 X 与 Z 的分布;

(3) 讨论 X 与 Z 的独立性。

解答 因为

$$Z = n \iff n \leq Y < n+1, \quad X = Y - n.$$

(1) 对 $n = 0, 1, 2, \dots$,

$$P(X \leq x, Z = n) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \int_n^{n+x} \lambda e^{-\lambda y} dy, & 0 \leq x < 1, \\ \int_n^{n+1} \lambda e^{-\lambda y} dy, & x \geq 1. \end{cases}$$

即

$$P(X \leq x, Z = n) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ e^{-\lambda n}(1 - e^{-\lambda x}), & 0 \leq x < 1, \\ e^{-\lambda n}(1 - e^{-\lambda}), & x \geq 1. \end{cases}$$

(2) Z 的分布:

$$P(Z = n) = P(n \leq Y < n+1) = \int_n^{n+1} \lambda e^{-\lambda y} dy = e^{-\lambda n}(1 - e^{-\lambda}),$$

其中 $n = 0, 1, 2, \dots$ 。

X 的分布:

$$P(X \leq x) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X \leq x, Z = n).$$

因此当 $x < 0$ 时,

$$F_X(x) = 0.$$

当 $0 \leq x < 1$ 时,

$$F_X(x) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda n}(1 - e^{-\lambda x}) = (1 - e^{-\lambda x}) \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda n}.$$

由于

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda n} = \frac{1}{1 - e^{-\lambda}},$$

所以

$$F_X(x) = \frac{1 - e^{-\lambda x}}{1 - e^{-\lambda}}, \quad 0 \leq x < 1.$$

当 $x \geq 1$ 时, 显然 $F_X(x) = 1$ 。综上,

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{1 - e^{-\lambda x}}{1 - e^{-\lambda}}, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

因而

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{\lambda e^{-\lambda x}}{1 - e^{-\lambda}}, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

(3) 当 $0 \leq x < 1$ 时,

$$P(X \leq x, Z = n) = e^{-\lambda n}(1 - e^{-\lambda x}) = P(X \leq x)P(Z = n).$$

其余 x 的情形显然也成立, 所以 X 与 Z 独立。

2. (10 分) 随机变量 X_n 依分布收敛于 X , Y_n 依分布收敛于正常数 c , 证明随机变量 $X_n Y_n$ 依分布收敛于 cX 。

解答 因为 $Y_n \xrightarrow{d} c$, 且极限为常数, 所以 $Y_n \xrightarrow{P} c$. 又因为 $X_n \xrightarrow{d} X$, 所以 X_n 依概率有界, 即对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $M > 0$, 使得当 n 充分大时,

$$P(|X_n| > M) < \varepsilon.$$

于是对任意 $\delta > 0$, 有

$$P(|X_n(Y_n - c)| > \delta) \leq P(|X_n| > M) + P\left(|Y_n - c| > \frac{\delta}{M}\right).$$

令 $n \rightarrow \infty$, 右端趋于不超过 ε 。再令 $\varepsilon \rightarrow 0$, 得到 $X_n(Y_n - c) \xrightarrow{P} 0$, 即 $X_n Y_n - cX_n \xrightarrow{P} 0$ 。

又因为 $X_n \xrightarrow{d} X$, 且 $c > 0$, 所以 $cX_n \xrightarrow{d} cX$. 下面证明把一个依概率趋于 0 的量加上去不改变依分布极限。记

$$U_n = cX_n, \quad V_n = X_n Y_n.$$

则

$$V_n - U_n \xrightarrow{P} 0.$$

对任意 x 和任意 $\eta > 0$, 有

$$P(V_n \leq x) \leq P(U_n \leq x + \eta) + P(|V_n - U_n| > \eta).$$

$$P(V_n \leq x) \geq P(U_n \leq x - \eta) - P(|V_n - U_n| > \eta).$$

令 $n \rightarrow \infty$, 再令 $\eta \downarrow 0$, 在 cX 的连续点 x 处得到

$$P(V_n \leq x) \rightarrow P(cX \leq x).$$

因此

$$X_n Y_n = V_n \xrightarrow{d} cX.$$

注: 本题用到以下几个基本结论。

(1) 若

$$Y_n \xrightarrow{d} c,$$

其中 c 为常数, 则

$$Y_n \xrightarrow{P} c.$$

(2) 若

$$X_n \xrightarrow{d} X,$$

则 $\{X_n\}$ 依概率有界, 即对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $M > 0$, 使得当 n 充分大时,

$$P(|X_n| > M) < \varepsilon.$$

3. (10 分) 证明: 随机变量 X 与自身是独立的, 当且仅当 X 是几乎处处常值的。

解答 若 X 与自身独立, 则对任意 x , 事件 $\{X \leq x\}$ 与自身独立, 所以

$$P(X \leq x) = P(X \leq x)^2.$$

故

$$F_X(x) \in \{0, 1\}, \quad \forall x.$$

由分布函数的单调性、右连续性及

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1,$$

知 F_X 只能在某点 c 处从 0 跳到 1, 于是

$$P(X = c) = 1.$$

即 X 几乎处处常值。

反之, 若 $P(X = c) = 1$, 则对任意 Borel 集 A, B ,

$$P(X \in A, X \in B) = P(X \in A)P(X \in B),$$

所以 X 与自身独立。

4. (10 分) 随机变量 X_n 独立同分布于参数为 1 的指数分布, 给定正实数 α , 证明

$$P(X_n > \alpha \ln n \text{ i.o.}) = \begin{cases} 1, & 0 < \alpha \leq 1, \\ 0, & \alpha > 1. \end{cases}$$

解答 令

$$A_n = \{X_n > \alpha \ln n\}.$$

因为 $X_n \sim E(1)$, 所以

$$P(A_n) = P(X_n > \alpha \ln n) = e^{-\alpha \ln n} = \frac{1}{n^\alpha}.$$

因此

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \begin{cases} \infty, & 0 < \alpha \leq 1, \\ < \infty, & \alpha > 1. \end{cases}$$

又由于 X_n 相互独立, 所以事件 A_n 相互独立。由 Borel-Cantelli 引理,

$$P(A_n \text{ i.o.}) = \begin{cases} 1, & 0 < \alpha \leq 1, \\ 0, & \alpha > 1. \end{cases}$$

5. (20 分) 设 $X_1, X_2, \dots$ 是独立同分布的随机变量, 令

$$S_n = X_1 + \dots + X_n.$$

(1) 若 $\mu = EX_1 > 0$, 证明对 $\alpha < 1$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(S_n \geq n^\alpha) = 1;$$

(2) 若 $\mu = EX_1 = 0$, $EX_1^2 < \infty$, 计算

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(S_n \geq n^\alpha).$$

解答

(1) 因为 $X_1, X_2, \dots$ 独立同分布, 且 $EX_1 = \mu > 0$, 由强大数定律,

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{a.s.} \mu.$$

于是

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} \mu.$$

又因为 $\alpha < 1$, 所以 $n^{\alpha-1} \rightarrow 0$, 因此当 n 充分大时, $n^{\alpha-1} < \mu/2$.
从而

$$\begin{aligned} P(S_n \geq n^\alpha) &= P\left(\frac{S_n}{n} \geq n^{\alpha-1}\right) \\ &\geq P\left(\frac{S_n}{n} \geq \mu/2\right) \rightarrow 1. \end{aligned}$$

(2) 令

$$\sigma^2 = EX_1^2.$$

因为 $EX_1 = 0$, 所以

$$\sigma^2 = \text{Var}(X_1).$$

若 $\sigma^2 > 0$, 由中心极限定理,

$$\frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{d} N(0, 1).$$

因此

$$\begin{aligned} P(S_n \geq n^\alpha) &= P\left(\frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}} \geq \frac{n^\alpha}{\sigma\sqrt{n}}\right) \\ &= P\left(\frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}} \geq \frac{n^{\alpha-\frac{1}{2}}}{\sigma}\right). \end{aligned}$$

下面分三种情况讨论:

当 $\alpha < \frac{1}{2}$ 时,

$$\frac{n^{\alpha-\frac{1}{2}}}{\sigma} \rightarrow 0,$$

所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(S_n \geq n^\alpha) = P(N(0, 1) \geq 0) = \frac{1}{2}.$$

当 $\alpha = \frac{1}{2}$ 时,

$$\frac{n^{\alpha-\frac{1}{2}}}{\sigma} = \frac{1}{\sigma},$$

所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(S_n \geq n^\alpha) = P\left(N(0, 1) \geq \frac{1}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{1}{\sigma}\right).$$

当 $\alpha > \frac{1}{2}$ 时,

$$\frac{n^{\alpha-\frac{1}{2}}}{\sigma} \rightarrow +\infty.$$

因而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(S_n \geq n^\alpha) = 0.$$

综上, 当 $\sigma^2 = EX_1^2 > 0$ 时,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(S_n \geq n^\alpha) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \alpha < \frac{1}{2}, \\ 1 - \Phi\left(\frac{1}{\sigma}\right), & \alpha = \frac{1}{2}, \\ 0, & \alpha > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

若 $\sigma^2 = 0$, 则 $X_1 = 0$ a.s., 从而 $S_n = 0$ a.s., 此时

$$P(S_n \geq n^\alpha) = 0.$$

6. (10 分) 某城市有 10000 名市民与两个剧院, 每个剧院有 x 个座位, 每个市民独立等可能地选择一个剧院看戏. 若希望“某个市民来到剧院后因为没有座位不得不放弃看戏”的概率不超过 0.01, 计算 x 的最小值.

参考数据:

$$\Phi(2.05) = 0.98, \quad \Phi(2.17) = 0.985, \quad \Phi(2.33) = 0.99, \quad \Phi(2.58) = 0.995,$$

Φ 是标准正态函数.

解答 设选择第一个剧院的人数为 N , 则

$$N \sim B\left(10000, \frac{1}{2}\right).$$

于是由中心极限定理,

$$Z = \frac{N - 5000}{50} \approx N(0, 1).$$

有人没有座位, 当且仅当某个剧院人数超过 x , 即要求等价于

$$P(10000 - x \leq N \leq x) \geq 0.99.$$

即

$$P\left(-\frac{x - 5000}{50} \leq Z \leq \frac{x - 5000}{50}\right) \geq 0.99.$$

由

$$\Phi(2.58) = 0.995$$

可得

$$P(-2.58 \leq Z \leq 2.58) = 0.99.$$

故取

$$\frac{x - 5000}{50} \geq 2.58.$$

于是

$$x \geq 5000 + 2.58 \times 50 = 5129.$$

所以 x 的最小值近似为

$$\boxed{5129}.$$

7. (15 分) 对随机变量 X, Y , 定义

$$d(X, Y) = E \frac{|X - Y|}{1 + |X - Y|}.$$

(1) 证明 d 定义了随机变量之间的一个距离, 或曰 d 满足正定性、对称性、三角不等式;

(2) 证明随机变量 X_n 依概率收敛于 X 当且仅当

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(X_n, X) = 0.$$

解答 记

$$\varphi(t) = \frac{t}{1+t}, \quad t \geq 0.$$

则 $\varphi(t) \geq 0$, 且 $\varphi(t) = 0$ 当且仅当 $t = 0$.

(1) 显然

$$d(X, Y) \geq 0, \quad d(X, Y) = d(Y, X).$$

若 $d(X, Y) = 0$, 则

$$\frac{|X - Y|}{1 + |X - Y|} = 0 \quad a.s.,$$

因此

$$X = Y \quad a.s.$$

即 d 在按几乎处处相等等同的随机变量类上满足正定性。

又因为对任意 $a, b \geq 0$, 有

$$\frac{a+b}{1+a+b} \leq \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b},$$

且

$$|X - Z| \leq |X - Y| + |Y - Z|,$$

所以

$$\begin{aligned} \frac{|X - Z|}{1 + |X - Z|} &\leq \frac{|X - Y| + |Y - Z|}{1 + |X - Y| + |Y - Z|} \\ &\leq \frac{|X - Y|}{1 + |X - Y|} + \frac{|Y - Z|}{1 + |Y - Z|}. \end{aligned}$$

两边取期望, 得

$$d(X, Z) \leq d(X, Y) + d(Y, Z).$$

因此 d 满足三角不等式。

(2) 先设

$$X_n \xrightarrow{P} X.$$

对任意 $\varepsilon > 0$, 有

$$\begin{aligned} d(X_n, X) &= E \frac{|X_n - X|}{1 + |X_n - X|} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} + P(|X_n - X| > \varepsilon). \end{aligned}$$

令 $n \rightarrow \infty$, 得

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} d(X_n, X) \leq \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon}.$$

再令 $\varepsilon \downarrow 0$, 得

$$d(X_n, X) \rightarrow 0.$$

反过来, 若

$$d(X_n, X) \rightarrow 0,$$

则对任意 $\varepsilon > 0$, 在事件 $\{|X_n - X| > \varepsilon\}$ 上有

$$\frac{|X_n - X|}{1 + |X_n - X|} \geq \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon}.$$

因此

$$d(X_n, X) \geq \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} P(|X_n - X| > \varepsilon).$$

所以

$$P(|X_n - X| > \varepsilon) \leq \frac{1 + \varepsilon}{\varepsilon} d(X_n, X) \rightarrow 0.$$

故

$$X_n \xrightarrow{P} X.$$

8. (15 分)

(1) 随机向量

$$\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)^T$$

服从正态分布, 对任意的 $k \neq j$,

$$E(Y_k | Y_j) = 0, \quad E(Y_k^2 | Y_j) = 1.$$

计算 $\mathbf{Y}$ 的密度函数。

(2) 随机向量

$$\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)^T$$

服从期望为 0 的正态分布, 且

$$E(X_1^2 | X_2) = X_3^2.$$

计算

$$E \frac{X_1^2 + X_2^2}{X_2^2 + X_3^2}.$$

解答

(1)

$$E(Y_k | Y_j) = EY_k + \frac{\text{Cov}(Y_k, Y_j)}{\text{Var}(Y_j)}(Y_j - EY_j).$$

已知对任意 $k \neq j$, $E(Y_k | Y_j) = 0$, 故 $EY_k = 0$, $\text{Cov}(Y_k, Y_j) = 0$, 又 $E(Y_k^2 | Y_j) = 1$. 因为此时 Y_k 与 Y_j 不相关, 而正态分布中不相关即独立, 所以

$$E(Y_k^2 | Y_j) = EY_k^2 = 1.$$

因此

$$EY_k = 0, \quad \text{Var}(Y_k) = 1,$$

且各分量两两不相关, 从而相互独立。

所以 $\mathbf{Y}$ 服从 n 维标准正态分布, 其密度函数为

$$f_{\mathbf{Y}}(y_1, \dots, y_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n y_i^2 \right\}, \quad y_i \in \mathbb{R}.$$

(2) 设

$$E(X_1 | X_2) = EX_1 + \frac{\text{Cov}(X_1, X_2)}{\text{Var}(X_2)}(X_2 - EX_2) = aX_2, \quad \text{Var}(X_1 | X_2) = \text{Var}(X_1) - \frac{\text{Cov}^2(X_1, X_2)}{\text{Var}(X_2)} = \sigma^2.$$

由正态条件分布公式,

$$E(X_1^2 | X_2) = \text{Var}(X_1 | X_2) + (E(X_1 | X_2))^2 = \sigma^2 + a^2 X_2^2.$$

又已知

$$E(X_1^2 | X_2) = X_3^2.$$

左边是 X_2 的函数, 所以 X_3^2 也是 X_2 的函数。由于 (X_2, X_3) 服从二维正态分布, 故必有

$$X_3 = bX_2 \quad a.s.$$

于是

$$X_3^2 = b^2 X_2^2.$$

因而

$$\sigma^2 + a^2 X_2^2 = b^2 X_2^2.$$

比较常数项与二次项, 得

$$\sigma^2 = 0, \quad a^2 = b^2.$$

所以

$$X_1 = aX_2 \quad a.s., \quad X_3^2 = a^2 X_2^2,$$

从而

$$X_1^2 = X_3^2 \quad a.s.$$

因此

$$\frac{X_1^2 + X_2^2}{X_2^2 + X_3^2} = \frac{X_3^2 + X_2^2}{X_2^2 + X_3^2} = 1 \quad a.s.$$

所以

$$E \frac{X_1^2 + X_2^2}{X_2^2 + X_3^2} = 1.$$

17 2024 年秋期末考题

1. (8 分) 设随机变量 $Z \sim N(0, 1)$, 求

$$E(Ze^Z), \quad E(Z^2 e^Z).$$

2. (12 分) 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)$, 且随机变量 Y 与 X 相互独立。

(1) 证明:

$$E(F(Y)) = P(X \leq Y).$$

- (2) 若 $X \sim N(0, 1)$, $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$, 证明:

$$P(X \leq Y) = F\left(\frac{\mu}{\sqrt{1+\sigma^2}}\right).$$

3. (14 分) 设 $X_1, \dots, X_n$ 独立同分布, 且都服从单位圆周上的均匀分布。对每个 $i = 1, \dots, n$, 定义事件 A_i 为: 所有点 $X_1, \dots, X_n$ 均落在以 X_i 为起点、顺时针方向长度为半个圆周的闭半圆内; 定义事件 B_i 为: 所有点 $X_1, \dots, X_n$ 均落在以 X_i 为起点、逆时针方向长度为半个圆周的闭半圆内。

(1) 求

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right).$$

(2) 令

$$Y = \sum_{i=1}^n I_{A_i \cup B_i},$$

求 EY 和 DY 。

4. (14 分) 设随机变量 $X_1, \dots, X_n$ 满足

$$EX_i = 0, \quad EX_i^2 < \infty, \quad i = 1, \dots, n.$$

记

$$\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^\top,$$

且设 Σ 为 $X_1, \dots, X_n$ 的协方差矩阵。

(1) 证明:

$$\Sigma \text{ 非退化} \iff \text{对任意 } \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n, \text{ 若 } \mathbf{a}^\top \mathbf{X} = 0 \text{ a.s., 则 } \mathbf{a} = \mathbf{0}.$$

- (2) 若 Σ 非退化, Y 为随机变量, 且

$$EY = 0, \quad EY^2 < \infty,$$

求

$$R(\mathbf{a}) = E\left(Y - \sum_{i=1}^n a_i X_i\right)^2 = E(Y - \mathbf{a}^\top \mathbf{X})^2$$

的最小值点 $\mathbf{a}$ 。

5. (14 分) 设随机变量 $X_1, X_2, \dots$ 相互独立, 且对每个 $n \geq 1$, 有

$$P(X_n = -n) = P(X_n = n) = \frac{1}{2}n^{-\beta}, \quad P(X_n = 0) = 1 - n^{-\beta}.$$

令

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i.$$

- (1) 当 $0 < \beta \leq 1$ 时, 证明:

$$n^{-3/2} S_n \xrightarrow{P} 0.$$

- (2) 当 $\beta > 1, \alpha > 0$ 时, 证明:

$$n^{-\alpha} S_n \xrightarrow{\text{a.s.}} 0.$$

6. (10 分) 设随机变量 X 在集合 $\{0, 1, \dots, N-1\}$ 上服从均匀分布, 即

$$P(X = k) = \frac{1}{N}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1.$$

- (1) 求 X 的母函数。

- (2) 若 N 为合数, 证明: X 可表示为两个非退化独立随机变量之和。

7. (14 分) 设 X_r 服从参数为 r 的 Γ 分布, 其密度函数为

$$p_r(x) = \frac{x^{r-1}}{\Gamma(r)} e^{-x} I_{\{x \geq 0\}}, \quad r > 0.$$

(1) 求

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n \leq n + a\sqrt{n}).$$

(2) 证明:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} P(X_r \leq r + a\sqrt{r})$$

存在, 且与上一问中的极限相同。

8. (14 分) 一堆货物的次品率为 p 。从中随机抽取 n 个货物, 记其中的次品数为 S_n 。若要保证

$$P\left(p \geq \frac{0.9S_n}{n}\right) \geq 0.95,$$

在以下两种情况下, 分别求满足条件的最小 n :

(1) 未获得往年调查信息, 只知道 $p \geq 0.5$;

(2) 获得了往年调查信息, 知道 $p \geq 0.8$ 。

注: 记 $\Phi(1.6) = 0.95$, 其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数。

18 2024 年秋期末题解答部分

1. (8 分) 设随机变量 $Z \sim N(0, 1)$, 求

$$E(Ze^Z), \quad E(Z^2e^Z).$$

解答 标准正态随机变量 Z 的矩母函数为

$$M_Z(t) = E(e^{tZ}) = e^{t^2/2}.$$

因此

$$E(Ze^Z) = M'_Z(1), \quad E(Z^2e^Z) = M''_Z(1).$$

又

$$M'_Z(t) = te^{t^2/2},$$

所以

$$E(Ze^Z) = M'_Z(1) = e^{1/2}.$$

继续求导得

$$M''_Z(t) = (1 + t^2)e^{t^2/2},$$

因此

$$E(Z^2e^Z) = M''_Z(1) = 2e^{1/2}.$$

综上,

$$\boxed{E(Ze^Z) = e^{1/2}, \quad E(Z^2e^Z) = 2e^{1/2}.}$$

【注:】 本题代入期望的定义硬算也并非难事, 请读者试之。

2. (12 分) 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)$, 且随机变量 Y 与 X 相互独立。

(1) 证明:

$$E(F(Y)) = P(X \leq Y).$$

(2) 若 $X \sim N(0, 1)$, $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$, 证明:

$$P(X \leq Y) = F\left(\frac{\mu}{\sqrt{1+\sigma^2}}\right).$$

解答

(1) 由 X 与 Y 独立, 条件在 Y 上, 有

$$P(X \leq Y | Y) = P(X \leq y)|_{y=Y} = F(Y).$$

两边取期望, 得

$$P(X \leq Y) = E(P(X \leq Y | Y)) = E(F(Y)).$$

(2) 因为 $X \sim N(0, 1)$, $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$, 且 X, Y 独立, 所以

$$Y - X \sim N(\mu, 1 + \sigma^2).$$

于是

$$P(X \leq Y) = P(Y - X \geq 0) = P\left(\frac{Y - X - \mu}{\sqrt{1 + \sigma^2}} \geq -\frac{\mu}{\sqrt{1 + \sigma^2}}\right).$$

令

$$Z = \frac{Y - X - \mu}{\sqrt{1 + \sigma^2}} \sim N(0, 1),$$

则

$$P(X \leq Y) = P\left(Z \geq -\frac{\mu}{\sqrt{1 + \sigma^2}}\right) = P\left(Z \leq \frac{\mu}{\sqrt{1 + \sigma^2}}\right).$$

由于此时 F 是标准正态分布函数, 故

$$P(X \leq Y) = F\left(\frac{\mu}{\sqrt{1 + \sigma^2}}\right).$$

3. (14 分) 设 $X_1, \dots, X_n$ 独立同分布, 且都服从单位圆周上的均匀分布. 对每个 $i = 1, \dots, n$, 定义事件 A_i 为: 所有点 $X_1, \dots, X_n$ 均落在以 X_i 为起点、顺时针方向长度为半个圆周的闭半圆内; 定义事件 B_i 为: 所有点 $X_1, \dots, X_n$ 均落在以 X_i 为起点、逆时针方向长度为半个圆周的闭半圆内.

(1) 求

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right).$$

(2) 令

$$Y = \sum_{i=1}^n I_{A_i \cup B_i},$$

求 EY 和 DY .

解答

- (1) 对固定的 i , 给定 X_i 后, 其余 $n-1$ 个点各自落入指定半圆的概率均为 $1/2$, 且相互独立, 故

$$P(A_i) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

又由于连续型分布下点落在边界上的概率为 0, 事件 $A_1, \dots, A_n$ 两两互不相容, 故

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

(2) 记

$$C_i = A_i \cup B_i.$$

对固定的 i , 由于 A_i 与 B_i 几乎不同时发生, 所以

$$P(C_i) = P(A_i) + P(B_i) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2^{n-2}}.$$

因此

$$EY = \sum_{i=1}^n P(C_i) = \frac{n}{2^{n-2}}.$$

下面计算 DY . 由对称性, 只需求 $P(C_i C_j)$, 其中 $i \neq j$. 同向事件 $A_i A_j$ 、 $B_i B_j$ 几乎不可能同时发生, 故

$$P(C_i C_j) = P(A_i B_j) + P(B_i A_j) = 2P(A_i B_j).$$

固定 X_i , 设从 X_i 顺时针到 X_j 的弧长为 T , 则 $T \sim U(0, 1)$. 若 $A_i B_j$ 发生, 则必须有 $0 \leq T \leq 1/2$, 且其余 $n-2$ 个点都落在从 X_i 到 X_j 的这段弧上. 因此

$$P(A_i B_j) = \int_0^{1/2} t^{n-2} dt = \frac{1}{(n-1)2^{n-1}}.$$

于是

$$P(C_i C_j) = \frac{2}{(n-1)2^{n-1}} = \frac{1}{(n-1)2^{n-2}}.$$

所以

$$EY^2 = E\left(\sum_{i=1}^n I_{C_i}\right)^2 = \sum_{i=1}^n P(C_i) + \sum_{i \neq j} P(C_i C_j).$$

代入得

$$EY^2 = \frac{n}{2^{n-2}} + n(n-1) \cdot \frac{1}{(n-1)2^{n-2}} = \frac{2n}{2^{n-2}} = \frac{n}{2^{n-3}}.$$

因此

$$DY = EY^2 - (EY)^2 = \frac{n}{2^{n-3}} - \left(\frac{n}{2^{n-2}}\right)^2.$$

综上,

$$\boxed{EY = \frac{n}{2^{n-2}}, \quad DY = \frac{n}{2^{n-3}} - \frac{n^2}{2^{2n-4}}}.$$

4. (14 分) 设随机变量 $X_1, \dots, X_n$ 满足

$$EX_i = 0, \quad EX_i^2 < \infty, \quad i = 1, \dots, n.$$

记

$$\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^\top,$$

且设 Σ 为 $X_1, \dots, X_n$ 的协方差矩阵。

(1) 证明:

$$\Sigma \text{ 非退化} \iff \text{对任意 } \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n, \text{ 若 } \mathbf{a}^\top \mathbf{X} = 0 \text{ a.s., 则 } \mathbf{a} = \mathbf{0}.$$

(2) 若 Σ 非退化, Y 为随机变量, 且

$$EY = 0, \quad EY^2 < \infty,$$

求

$$R(\mathbf{a}) = E \left(Y - \sum_{i=1}^n a_i X_i \right)^2 = E(Y - \mathbf{a}^\top \mathbf{X})^2$$

的最小值点 $\mathbf{a}$ 。

解答

(1) 对任意 $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, 有

$$\mathbf{a}^\top \Sigma \mathbf{a} = \text{Var}(\mathbf{a}^\top \mathbf{X}).$$

又因为 $EX_i = 0$, 所以 $E(\mathbf{a}^\top \mathbf{X}) = 0$, 于是

$$\mathbf{a}^\top \Sigma \mathbf{a} = E(\mathbf{a}^\top \mathbf{X})^2.$$

若 Σ 非退化, 则对任意 $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, 有 $\mathbf{a}^\top \Sigma \mathbf{a} > 0$, 因此若 $\mathbf{a}^\top \mathbf{X} = 0$ a.s., 则

$$\mathbf{a}^\top \Sigma \mathbf{a} = E(\mathbf{a}^\top \mathbf{X})^2 = 0,$$

从而只能有 $\mathbf{a} = \mathbf{0}$.

反过来, 若 Σ 退化, 则存在 $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, 使得

$$\mathbf{a}^\top \Sigma \mathbf{a} = 0.$$

由 $E(\mathbf{a}^\top \mathbf{X})^2 = 0$ 可得 $\mathbf{a}^\top \mathbf{X} = 0$ a.s., 这与题设性质矛盾。因此 Σ 必非退化。

综上, 命题得证。

(2) 记

$$\mathbf{c} = E(Y\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} E(YX_1) \\ \vdots \\ E(YX_n) \end{pmatrix}.$$

展开 $R(\mathbf{a})$, 得

$$R(\mathbf{a}) = EY^2 - 2E(Y\mathbf{a}^\top \mathbf{X}) + E(\mathbf{a}^\top \mathbf{X})^2.$$

即

$$R(\mathbf{a}) = EY^2 - 2\mathbf{a}^\top \mathbf{c} + \mathbf{a}^\top \Sigma \mathbf{a}.$$

这是关于 $\mathbf{a}$ 的二次函数。求导得

$$\nabla R(\mathbf{a}) = -2\mathbf{c} + 2\Sigma \mathbf{a}.$$

令其为 $\mathbf{0}$, 得到

$$\Sigma \mathbf{a} = \mathbf{c}.$$

由于 Σ 非退化, 故最小值点唯一, 为

$$\mathbf{a}_0 = \Sigma^{-1} \mathbf{c} = \Sigma^{-1} E(Y\mathbf{X}).$$

5. (14 分) 设随机变量 $X_1, X_2, \dots$ 相互独立, 且对每个 $n \geq 1$, 有

$$P(X_n = -n) = P(X_n = n) = \frac{1}{2}n^{-\beta}, \quad P(X_n = 0) = 1 - n^{-\beta}.$$

令

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i.$$

(1) 当 $0 < \beta \leq 1$ 时, 证明:

$$n^{-3/2}S_n \xrightarrow{P} 0.$$

(2) 当 $\beta > 1, \alpha > 0$ 时, 证明:

$$n^{-\alpha}S_n \xrightarrow{a.s.} 0.$$

解答

(1) 由题意,

$$EX_n = 0, \quad EX_n^2 = n^2 P(X_n \neq 0) = n^2 \cdot n^{-\beta} = n^{2-\beta}.$$

故

$$DX_n = n^{2-\beta}.$$

由于 $X_1, X_2, \dots$ 相互独立, 所以

$$DS_n = \sum_{k=1}^n DX_k = \sum_{k=1}^n k^{2-\beta}.$$

于是

$$D(n^{-3/2}S_n) = n^{-3}DS_n = n^{-3} \sum_{k=1}^n k^{2-\beta}.$$

当 $0 < \beta \leq 1$ 时,

$$\sum_{k=1}^n k^{2-\beta} \leq n \cdot n^{2-\beta} = n^{3-\beta}.$$

因此

$$D(n^{-3/2}S_n) \leq n^{-3} \cdot n^{3-\beta} = n^{-\beta} \rightarrow 0.$$

由 Chebyshev 不等式, 对任意 $\varepsilon > 0$,

$$P\left(\left|n^{-3/2}S_n\right| > \varepsilon\right) \leq \frac{D(n^{-3/2}S_n)}{\varepsilon^2} \rightarrow 0.$$

故

$$n^{-3/2}S_n \xrightarrow{P} 0.$$

(2) 当 $\beta > 1$ 时,

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(X_n \neq 0) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\beta} < \infty.$$

由 Borel-Cantelli 引理可知

$$P(X_n \neq 0 \text{ i.o.}) = 0.$$

因此几乎处处存在随机正整数 N , 使得当 $n \geq N$ 时,

$$X_n = 0.$$

于是 S_n 从某一项起为常数。记该常数为 S , 则

$$n^{-\alpha}S_n = n^{-\alpha}S \rightarrow 0.$$

故

$$n^{-\alpha}S_n \xrightarrow{a.s.} 0.$$

注: 这里的“从某一项起为常数”是逐样本点而言的。也就是说, 对几乎每个 ω , 存在一个依赖于 ω 的整数 $N(\omega)$, 使得从这一项以后 $X_n(\omega) = 0$ 。因此 $S_n(\omega)$ 从某一项起不再变化。这个最终的常数一般依赖于 ω , 不是普通意义下的确定常数。

6. (10 分) 设随机变量 X 在集合 $\{0, 1, \dots, N-1\}$ 上服从均匀分布, 即

$$P(X = k) = \frac{1}{N}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1.$$

(1) 求 X 的母函数。

(2) 若 N 为合数, 证明: X 可表示为两个非退化独立随机变量之和。

解答

(1) 设 X 的概率母函数为

$$G_X(s) = E(s^X).$$

则

$$G_X(s) = \sum_{k=0}^{N-1} s^k P(X = k) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} s^k.$$

因此

$$G_X(s) = \frac{1-s^N}{N(1-s)}, \quad s \neq 1.$$

且

$$G_X(1) = 1.$$

(2) 若 $N = ab$, 其中 $a, b > 1$, 则

$$\frac{1-s^N}{N(1-s)} = \frac{1-s^a}{a(1-s)} \cdot \frac{1-s^{ab}}{b(1-s^a)}.$$

这正对应

$$Y \sim U\{0, 1, \dots, a-1\}, \quad Z \sim U\{0, a, 2a, \dots, (b-1)a\},$$

且 Y, Z 独立时,

$$G_{Y+Z}(s) = G_Y(s)G_Z(s) = G_X(s).$$

7. (14 分) 设 X_r 服从参数为 r 的 Γ 分布, 其密度函数为

$$p_r(x) = \frac{x^{r-1}}{\Gamma(r)} e^{-x} I_{\{x \geq 0\}}, \quad r > 0.$$

(1) 求

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n \leq n + a\sqrt{n}).$$

(2) 证明:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} P(X_r \leq r + a\sqrt{r})$$

存在, 且与上一问中的极限相同。

解答

(1) 当 n 为正整数时, X_n 可看作 n 个独立同分布的指数分布随机变量之和, 即

$$X_n = \xi_1 + \dots + \xi_n,$$

其中

$$\xi_i \sim \Gamma(1, 1), \quad E\xi_i = 1, \quad D\xi_i = 1.$$

由中心极限定理,

$$\frac{X_n - n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d} N(0, 1).$$

因此

$$P(X_n \leq n + a\sqrt{n}) = P\left(\frac{X_n - n}{\sqrt{n}} \leq a\right) \rightarrow \Phi(a).$$

故

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n \leq n + a\sqrt{n}) = \Phi(a).}$$

(2) 对任意 $r > 0$, $X_r \sim \Gamma(r, 1)$ 的矩母函数为

$$M_{X_r}(t) = E(e^{tX_r}) = (1-t)^{-r}, \quad t < 1.$$

于是

$$E \exp \left\{ t \frac{X_r - r}{\sqrt{r}} \right\} = e^{-t\sqrt{r}} \left(1 - \frac{t}{\sqrt{r}} \right)^{-r}.$$

取对数, 得

$$\log E \exp \left\{ t \frac{X_r - r}{\sqrt{r}} \right\} = -t\sqrt{r} - r \log \left(1 - \frac{t}{\sqrt{r}} \right).$$

由

$$-r \log \left(1 - \frac{t}{\sqrt{r}} \right) = t\sqrt{r} + \frac{t^2}{2} + o(1).$$

因此

$$\log E \exp \left\{ t \frac{X_r - r}{\sqrt{r}} \right\} \rightarrow \frac{t^2}{2}.$$

即

$$E \exp \left\{ t \frac{X_r - r}{\sqrt{r}} \right\} \rightarrow e^{t^2/2}.$$

所以

$$\frac{X_r - r}{\sqrt{r}} \xrightarrow{d} N(0, 1).$$

于是

$$P(X_r \leq r + a\sqrt{r}) = P\left(\frac{X_r - r}{\sqrt{r}} \leq a\right) \rightarrow \Phi(a).$$

故

$$\lim_{r \rightarrow \infty} P(X_r \leq r + a\sqrt{r}) = \Phi(a),$$

该极限存在, 且与上一问相同。

8. (14 分) 一堆货物的次品率为 p 。从中随机抽取 n 个货物, 记其中的次品数为 S_n 。
若要保证

$$P\left(p \geq \frac{0.9S_n}{n}\right) \geq 0.95,$$

在以下两种情况下, 分别求满足条件的最小 n :

(1) 未获得往年调查信息, 只知道 $p \geq 0.5$;

(2) 获得了往年调查信息, 知道 $p \geq 0.8$ 。

注: 记 $\Phi(1.6) = 0.95$, 其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数。

解答 由于 $S_n \sim B(n, p)$, 由中心极限定理,

$$\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \approx N(0, 1).$$

题目要求

$$P\left(p \geq \frac{0.9S_n}{n}\right) \geq 0.95.$$

这等价于

$$P\left(S_n \leq \frac{10}{9}np\right) \geq 0.95.$$

标准化得

$$P\left(\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq \frac{\frac{10}{9}np - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \geq 0.95.$$

而

$$\frac{\frac{10}{9}np - np}{\sqrt{np(1-p)}} = \frac{np/9}{\sqrt{np(1-p)}} = \frac{\sqrt{n}}{9} \sqrt{\frac{p}{1-p}}.$$

因此近似地只需

$$\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{9} \sqrt{\frac{p}{1-p}}\right) \geq 0.95.$$

由题给

$$\Phi(1.6) = 0.95,$$

故只需

$$\frac{\sqrt{n}}{9} \sqrt{\frac{p}{1-p}} \geq 1.6.$$

即

$$n \geq 9^2 \cdot 1.6^2 \cdot \frac{1-p}{p}.$$

由于

$$\frac{1-p}{p}$$

关于 p 单调递减，所以在只知道 $p \geq p_0$ 时，最坏情况取 $p = p_0$ 。

(1) 若只知道 $p \geq 0.5$ ，则

$$n \geq 9^2 \cdot 1.6^2 \cdot \frac{1-0.5}{0.5} = 81 \cdot 2.56 = 207.36.$$

所以满足条件的最小整数为

$$\boxed{n = 208.}$$

(2) 若知道 $p \geq 0.8$ ，则

$$n \geq 9^2 \cdot 1.6^2 \cdot \frac{1-0.8}{0.8} = 207.36 \cdot 0.25 = 51.84.$$

所以满足条件的最小整数为

$$\boxed{n = 52.}$$

19 2025 年春期末考题

1. (10 分) 设随机变量 $N, X_1, X_2, \dots$ 相互独立,

$$N \sim P(\lambda), \quad X_i \sim N(0, 1), \quad i = 1, 2, \dots.$$

记

$$Y = \sum_{i=1}^N X_i.$$

- (1) 求 Y 的特征函数。
 (2) 计算 $E(Y)$ 和 $E(Y^2)$ 。
 2. (15 分) 设 X 为随机变量, b_1, b_2 为正实数, c_1, c_2 为实数。
 (1) 若 $P(X \neq 0) > 0$, $b_1 X$ 与 $b_2 X$ 同分布, 证明 $b_1 = b_2$ 。
 (2) 若 X 非退化, $b_1 X + c_1$ 与 $b_2 X + c_2$ 同分布, 证明

$$b_1 = b_2, \quad c_1 = c_2.$$

3. (15 分) 设 X, Y 相互独立, 分别服从参数为 λ, μ 的指数分布, 记

$$U = \min\{X, Y\}, \quad V = \max\{X, Y\}.$$

- (1) 求 $P(U = X)$ 。
 (2) 证明 U 与 $V - U$ 相互独立。
 4. (15 分) 设 $X, Y, X_1, Y_1, X_2, Y_2, \dots$ 为同一概率空间中的随机变量,

$$X_n \xrightarrow{d} X, \quad Y_n \xrightarrow{d} Y.$$

- (1) 举例说明不一定成立

$$X_n + Y_n \xrightarrow{d} X + Y.$$

- (2) 若 Y 退化, 证明

$$X_n + Y_n \xrightarrow{d} X + Y.$$

5. (5 分) 设 $X_1, X_2, \dots$ 相互独立, 均服从 $[0, 1]$ 上的均匀分布, 利用中心极限定理估计

$$P\left(\sum_{i=1}^{300} X_i > 60\right)$$

(可用标准正态分布的分布函数表示)。

6. (10 分) 掷两枚质地均匀的骰子, 计算在第一次发生“点数之和为 7”之前发生过“点数之和为 5”的概率。

7. (10 分) 设 $(X_1, \dots, X_n)$ 服从 n 维联合正态分布, $n \geq 3$, 均值

$$\vec{a} = \vec{0},$$

协方差矩阵

$$\Sigma = (\sigma_{ij})_{n \times n}.$$

求在

$$\sum_{i=1}^n X_i = x$$

的条件下 X_1 的分布。

8. (10 分) 设随机变量 $X_2, X_3, \dots$ 相互独立,

$$P(X_n = -n) = P(X_n = n) = \frac{1}{2n\sqrt{\ln n}},$$

$$P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}, \quad n = 2, 3, \dots.$$

判断

$$\frac{1}{n} \sum_{i=2}^n X_i$$

是否依概率收敛, 并说明理由。

9. (10 分) 设随机变量 $X_1, X_2, \dots$ 独立同分布。

(1) 若 $E(|X_1|) < \infty$, 证明

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|X_n|}{n} = 0\right) = 1.$$

(2) 若 $E(|X_1|) = \infty$, 证明

$$P\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|X_n|}{n} = \infty\right) = 1.$$

20 2025 年春季期末题解答部分

1. (10 分) 设随机变量 $N, X_1, X_2, \dots$ 相互独立,

$$N \sim P(\lambda), \quad X_i \sim N(0, 1), \quad i = 1, 2, \dots.$$

记

$$Y = \sum_{i=1}^N X_i.$$

(1) 求 Y 的特征函数。

(2) 计算 $E(Y)$ 和 $E(Y^2)$ 。

解答

(1) 条件于 $N = n$, 有

$$Y \mid N = n \sim N(0, n),$$

故

$$\varphi_Y(t) = E\left(e^{-\frac{Nt^2}{2}}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{nt^2}{2}} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} = \exp\left\{\lambda\left(e^{-\frac{t^2}{2}} - 1\right)\right\}.$$

(2) 由条件期望,

$$E(Y) = E(E(Y \mid N)) = 0.$$

又因为

$$E(Y^2 \mid N) = N,$$

所以

$$E(Y^2) = E(N) = \lambda.$$

2. (15 分) 设 X 为随机变量, b_1, b_2 为正实数, c_1, c_2 为实数。

(1) 若 $P(X \neq 0) > 0$, b_1X 与 b_2X 同分布, 证明 $b_1 = b_2$ 。

(2) 若 X 非退化, $b_1X + c_1$ 与 $b_2X + c_2$ 同分布, 证明

$$b_1 = b_2, \quad c_1 = c_2.$$

解答 设 X 的特征函数为 $\varphi(t)$ 。

(1) 由 b_1X 与 b_2X 同分布, 得

$$\varphi(b_1t) = \varphi(b_2t).$$

令

$$a = \frac{b_1}{b_2} > 0,$$

则

$$\varphi(at) = \varphi(t).$$

若 $a \neq 1$, 反复迭代, 取趋于 0 的一边, 由特征函数连续性得

$$\varphi(t) = \varphi(0) = 1.$$

因此 $X = 0$ a.s., 与 $P(X \neq 0) > 0$ 矛盾。故

$$b_1 = b_2.$$

(2) 由 $b_1X + c_1$ 与 $b_2X + c_2$ 同分布, 得

$$e^{itc_1} \varphi(b_1t) = e^{itc_2} \varphi(b_2t).$$

令

$$a = \frac{b_1}{b_2}, \quad d = \frac{c_1 - c_2}{b_2},$$

则

$$aX + d \stackrel{d}{=} X,$$

从而

$$\varphi(t) = e^{itd} \varphi(at).$$

若 $a \neq 1$, 不妨设 $0 < a < 1$, 反复迭代得

$$\varphi(t) = \exp\{itd(1 + a + \dots + a^{n-1})\} \varphi(a^n t).$$

令 $n \rightarrow \infty$, 得

$$\varphi(t) = \exp \left\{ it \frac{d}{1-a} \right\}.$$

这说明 $X = \frac{d}{1-a}$ a.s., 即 X 退化, 矛盾。
因此只能有

$$a = 1,$$

即

$$b_1 = b_2.$$

此时

$$X + d \stackrel{d}{=} X.$$

所以

$$\varphi(t) = e^{itd} \varphi(t).$$

由于 $\varphi(0) = 1$, 且 φ 连续, 故在 0 的某邻域内 $\varphi(t) \neq 0$, 于是

$$e^{itd} = 1$$

在 0 的某邻域内成立, 因此

$$d = 0.$$

故

$$c_1 = c_2.$$

3. (15 分) 设 X, Y 相互独立, 分别服从参数为 λ, μ 的指数分布, 记

$$U = \min\{X, Y\}, \quad V = \max\{X, Y\}.$$

(1) 求 $P(U = X)$ 。

(2) 证明 U 与 $V - U$ 相互独立。

解答

(1) 因为 X, Y 为连续型随机变量, 所以

$$P(U = X) = P(X \leq Y) = \int_0^\infty \int_x^\infty \lambda \mu e^{-\lambda x - \mu y} dy dx = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}.$$

(2) 令

$$W = V - U.$$

当 $U = u, W = w$ 且 $u > 0, w > 0$ 时, 对应两种情形:

$$X = u, Y = u + w,$$

或

$$X = u + w, Y = u.$$

这两个变量变换的 Jacobi 行列式绝对值均为 1。

又因为

$$f_{X,Y}(x, y) = \lambda \mu e^{-\lambda x - \mu y}, \quad x > 0, y > 0,$$

所以

$$f_{U,W}(u, w) = f_{X,Y}(u, u + w) + f_{X,Y}(u + w, u).$$

即

$$f_{U,W}(u, w) = \lambda \mu e^{-\lambda u - \mu(u+w)} + \lambda \mu e^{-\lambda(u+w) - \mu u}.$$

整理得

$$f_{U,W}(u, w) = \lambda \mu e^{-(\lambda+\mu)u} (e^{-\mu w} + e^{-\lambda w}), \quad u > 0, w > 0.$$

下面求边缘密度。对 w 积分, 得

$$f_U(u) = \int_0^\infty f_{U,W}(u, w) dw = (\lambda + \mu) e^{-(\lambda+\mu)u}, \quad u > 0.$$

对 u 积分, 得

$$f_W(w) = \int_0^\infty f_{U,W}(u, w) du = \frac{\lambda\mu}{\lambda + \mu} (e^{-\mu w} + e^{-\lambda w}), \quad w > 0.$$

因此

$$f_U(u)f_W(w) = \lambda\mu e^{-(\lambda+\mu)u} (e^{-\mu w} + e^{-\lambda w}) = f_{U,W}(u, w).$$

故 U 与 W 相互独立, 即

$$U \text{ 与 } V - U$$

相互独立。

4. (15 分) 设 $X, Y, X_1, Y_1, X_2, Y_2, \dots$ 为同一概率空间中的随机变量,

$$X_n \xrightarrow{d} X, \quad Y_n \xrightarrow{d} Y.$$

(1) 举例说明不一定成立

$$X_n + Y_n \xrightarrow{d} X + Y.$$

(2) 若 Y 退化, 证明

$$X_n + Y_n \xrightarrow{d} X + Y.$$

解答

(1) 设 $Z \sim N(0, 1)$, 令

$$X = Y = Z, \quad X_n = Z, \quad Y_n = -Z.$$

则

$$X_n \xrightarrow{d} X,$$

且由于 $-Z \stackrel{d}{=} Z$, 有

$$Y_n \xrightarrow{d} Y.$$

但是

$$X_n + Y_n = 0,$$

而

$$X + Y = 2Z.$$

二者分布不同, 故不一定有

$$X_n + Y_n \xrightarrow{d} X + Y.$$

(2) 设 $Y = c$ a.s. 因为

$$Y_n \xrightarrow{d} c,$$

所以

$$Y_n \xrightarrow{P} c.$$

取 x 为 $X + c$ 的分布函数连续点, 则 $x - c$ 是 X 的分布函数连续点。

对任意 $\varepsilon > 0$, 有

$$P(X_n + Y_n \leq x) \leq P(X_n \leq x - c + \varepsilon) + P(|Y_n - c| > \varepsilon),$$

以及

$$P(X_n + Y_n \leq x) \geq P(X_n \leq x - c - \varepsilon) - P(|Y_n - c| > \varepsilon).$$

令 $n \rightarrow \infty$, 再令 $\varepsilon \rightarrow 0$, 得

$$P(X_n + Y_n \leq x) \rightarrow P(X + c \leq x).$$

因此

$$X_n + Y_n \xrightarrow{d} X + c = X + Y.$$

5. (5 分) 设 $X_1, X_2, \dots$ 相互独立, 均服从 $[0, 1]$ 上的均匀分布, 利用中心极限定理估计

$$P\left(\sum_{i=1}^{300} X_i > 60\right)$$

(可用标准正态分布的分布函数表示)。

解答 记

$$S_{300} = \sum_{i=1}^{300} X_i.$$

因为

$$E(X_i) = \frac{1}{2}, \quad \text{Var}(X_i) = \frac{1}{12},$$

所以

$$E(S_{300}) = 150, \quad \text{Var}(S_{300}) = 25.$$

由中心极限定理,

$$\frac{S_{300} - 150}{5} \approx N(0, 1).$$

故

$$P(S_{300} > 60) = P\left(\frac{S_{300} - 150}{5} > -18\right) \approx 1 - \Phi(-18) = \Phi(18).$$

6. (10 分) 掷两枚质地均匀的骰子, 计算在第一次发生“点数之和为 7”之前发生过“点数之和为 5”的概率。

解答 每次掷骰子, 记

$$A = \{\text{点数之和为 } 7\}, \quad B = \{\text{点数之和为 } 5\}.$$

则

$$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}, \quad P(B) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}.$$

只需比较事件 A 与 B 谁先发生, 其余结果可以忽略。

因此所求概率为

$$\frac{P(B)}{P(A) + P(B)} = \frac{\frac{1}{9}}{\frac{1}{6} + \frac{1}{9}} = \frac{2}{5}.$$

7. (10 分) 设 $(X_1, \dots, X_n)$ 服从 n 维联合正态分布, $n \geq 3$, 均值

$$\vec{a} = \vec{0},$$

协方差矩阵

$$\Sigma = (\sigma_{ij})_{n \times n}.$$

求在

$$\sum_{i=1}^n X_i = x$$

的条件下 X_1 的分布。

解答 记

$$S = \sum_{i=1}^n X_i.$$

因为 $(X_1, \dots, X_n)$ 为联合正态, 所以 (X_1, S) 也为二维正态。

有

$$E(X_1) = E(S) = 0,$$

$$\text{Var}(X_1) = \sigma_{11},$$

$$\text{Cov}(X_1, S) = \sum_{j=1}^n \sigma_{1j},$$

$$\text{Var}(S) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_{ij}.$$

令

$$A = \sum_{j=1}^n \sigma_{1j}, \quad B = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_{ij}.$$

由二维正态的条件分布公式, 得

$$X_1 | S = x \sim N\left(\frac{A}{B}x, \sigma_{11} - \frac{A^2}{B}\right).$$

即

$$X_1 | \sum_{i=1}^n X_i = x \sim N\left(\frac{\sum_{j=1}^n \sigma_{1j}}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_{ij}}x, \sigma_{11} - \frac{\left(\sum_{j=1}^n \sigma_{1j}\right)^2}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_{ij}}\right).$$

【注】：多维正态分布的条件分布公式.

若随机向量

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \sim N \left(\begin{pmatrix} \mu_X \\ \mu_Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Sigma_{XX} & \Sigma_{XY} \\ \Sigma_{YX} & \Sigma_{YY} \end{pmatrix} \right),$$

且 Σ_{YY} 非退化, 则

$$X | Y = y \sim N(\mu_X + \Sigma_{XY}\Sigma_{YY}^{-1}(y - \mu_Y), \Sigma_{XX} - \Sigma_{XY}\Sigma_{YY}^{-1}\Sigma_{YX}).$$

特别地, 若 X, Y 都是一维随机变量, 且 (X, Y) 服从二维正态分布, 则

$$X | Y = y \sim N \left(E(X) + \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\text{Var}(Y)}(y - E(Y)), \text{Var}(X) - \frac{\text{Cov}^2(X, Y)}{\text{Var}(Y)} \right).$$

8. (10 分) 设随机变量 $X_2, X_3, \dots$ 相互独立,

$$P(X_n = -n) = P(X_n = n) = \frac{1}{2n\sqrt{\ln n}},$$

$$P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}, \quad n = 2, 3, \dots.$$

判断

$$\frac{1}{n} \sum_{i=2}^n X_i$$

是否依概率收敛, 并说明理由。

解答 记

$$S_n = \sum_{i=2}^n X_i.$$

由于 X_i 相互独立,

$$\text{Var} \left(\frac{S_n}{n} \right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=2}^n \text{Var}(X_i) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=2}^n \frac{i}{\sqrt{\ln i}} \rightarrow 0.$$

由 Chebyshev 不等式, 对任意 $\varepsilon > 0$,

$$P \left(\left| \frac{S_n}{n} \right| > \varepsilon \right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \text{Var} \left(\frac{S_n}{n} \right) \rightarrow 0.$$

因此

$$\frac{1}{n} \sum_{i=2}^n X_i \xrightarrow{P} 0.$$

所以它依概率收敛, 极限为 0。

9. (10 分) 假设 $X_1, X_2, \dots$ 独立同分布. 证明:

(1) 若 $E|X_1| < \infty$, 则

$$P \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n}{n} = 0 \right) = 1;$$

(2) 若 $E|X_1| = \infty$, 则

$$P \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|X_n|}{n} = \infty \right) = 1.$$

解答

(1) 记

$$S_n = X_1 + \dots + X_n.$$

因为 $X_1, X_2, \dots$ 独立同分布, 且 $E|X_1| < \infty$, 由强大数定律,

$$\frac{S_n}{n} \rightarrow EX_1, \quad a.s., \quad \frac{S_{n-1}}{n} \rightarrow EX_1, \quad a.s.,$$

所以

$$\frac{X_n}{n} \rightarrow EX_1 - EX_1 = 0, \quad a.s.$$

即

$$P \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n}{n} = 0 \right) = 1.$$

(2) 任取 $M > 0$. 令

$$A_n = \left\{ \frac{|X_n|}{n} > M \right\} = \{|X_n| > Mn\}.$$

由于 $X_1, X_2, \dots$ 独立同分布, 所以 $A_1, A_2, \dots$ 相互独立, 且

$$P(A_n) = P(|X_1| > Mn).$$

下面证明

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_1| > Mn) = \infty.$$

记

$$f(x) = P(|X_1| > x).$$

则 $f(x)$ 关于 x 单调下降, 且

$$E|X_1| = \int_0^{\infty} P(|X_1| > x) dx = \int_0^{\infty} f(x) dx = \infty.$$

对每个 $n \geq 1$, 当 $x \in [Mn, M(n+1)]$ 时,

$$f(x) \leq f(Mn).$$

因此

$$\int_M^{\infty} f(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{Mn}^{M(n+1)} f(x) dx \leq M \sum_{n=1}^{\infty} f(Mn).$$

左边为 ∞ , 故

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_1| > Mn) = \sum_{n=1}^{\infty} f(Mn) = \infty.$$

由 Borel-Cantelli 引理,

$$P(A_n \text{ i.o.}) = 1.$$

即

$$P\left(\frac{|X_n|}{n} > M \text{ 无穷多次发生}\right) = 1.$$

所以

$$P\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|X_n|}{n} \geq M\right) = 1.$$

令 $M = 1, 2, 3, \dots$, 取可数交, 得

$$P\left(\forall M \in \mathbb{N}, \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|X_n|}{n} \geq M\right) = 1.$$

因而

$$P\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|X_n|}{n} = \infty\right) = 1.$$

21 2025 年秋期末考题

1. (10 分) 设 $\{X_n\}, \{Y_n\}, X, Y$ 是随机变量。

(1) 若 $X_n \xrightarrow{P} X, X_n \xrightarrow{P} Y$, 证明

$$P(X = Y) = 1.$$

(2) 若 $X_n \xrightarrow{P} X, Y_n \xrightarrow{P} Y$, 证明

$$X_n Y_n \xrightarrow{P} XY.$$

2. (12 分) 设 $I_1, \dots, I_K$ 将区间 $[0, 1]$ 划分成 K 个不交的小区间, 其中区间 I_i 的长度为 $p_i, 1 \leq i \leq K$. $U_1, \dots, U_n$ 为相互独立且服从 $[0, 1]$ 均匀分布的随机变量, 定义 $Z_i^{(n)}$ 为 $U_1, \dots, U_n$ 落在区间 I_i 的个数, 再定义

$$R_n = \prod_{i=1}^K p_i^{Z_i^{(n)}}.$$

证明

$$R_n^{\frac{1}{n}} \xrightarrow{\text{a.s.}} \exp \left\{ \sum_{i=1}^K p_i \ln p_i \right\}.$$

3. (14 分) 设 $X_1, \dots, X_n, \dots$ 为相互独立的随机变量, $X_n \sim \text{Pois}(n)$, 随机变量 $Z \sim N(0, 1)$, 证明:

(1)

$$\frac{X_n - n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d} Z.$$

(2)

$$\frac{(X_n - n) + (X_{2n} - 2n)}{\sqrt{X_n + X_{2n}}} \xrightarrow{d} Z.$$

4. (16 分) 将 n 个可分辨的球随机放入 n 个盒子中, 每个球独立等概率地放入任一盒子, 设 S_n 为全部放完后空盒子的个数。

(1) 求 S_n 的期望和方差。

(2) 证明 $n \rightarrow +\infty$ 时,

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} e^{-1}.$$

5. (18 分) 设随机向量

$$Y = (Y_1, \dots, Y_n)^T$$

服从 n 维高斯分布, 且对任意 $i \neq j$ 有

$$E(Y_i | Y_j) = 0, \quad E(Y_i^2 | Y_j) = 1.$$

(1) 求 Y 的分布。

(2) 设 A 为 n 阶实矩阵,

$$X = AY = (X_1, \dots, X_n)^T,$$

求 X 的期望和协方差矩阵。

(3) 设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$, 其中

$$a_{ij} = \sqrt{ij},$$

且 $X = AY$, 求在 $\{X_1 = x\}$ 下 Y_1 的条件分布。

6. (16 分) 设 X, Y, Z 相互独立, 且均服从分布 $N(0, 1)$, 定义

$$T = \frac{X + YZ}{\sqrt{1 + Z^2}}, \quad S = \frac{2XY}{\sqrt{X^2 + Y^2}}.$$

(1) 证明 T 与 Z 独立, 且 $T \sim N(0, 1)$ 。

(2) 证明 $S \sim N(0, 1)$ 。

7. (14 分) 小明按照如下规则掷硬币和骰子: 首先掷一次硬币, 若掷出反面则继续掷硬币, 直至掷出正面; 若掷出正面则掷一次骰子, 若掷出 6 点则结束, 若掷出点数不是 6 点, 则重新开始掷硬币。设结束时小明共掷了 X 次, 包括掷硬币和骰子的总次数, 求 X 的母函数。(硬币和骰子都是公平的。)

22 2025 年秋期末题解答部分

1. (10 分) 设 $\{X_n\}, \{Y_n\}, X, Y$ 是随机变量。

(1) 若 $X_n \xrightarrow{P} X, X_n \xrightarrow{P} Y$, 证明

$$P(X = Y) = 1.$$

(2) 若 $X_n \xrightarrow{P} X, Y_n \xrightarrow{P} Y$, 证明

$$X_n Y_n \xrightarrow{P} XY.$$

解答

(1) 对任意 $\varepsilon > 0$, 有

$$\{|X - Y| > \varepsilon\} \subset \left\{|X - X_n| > \frac{\varepsilon}{2}\right\} \cup \left\{|X_n - Y| > \frac{\varepsilon}{2}\right\}.$$

因此

$$P(|X - Y| > \varepsilon) \leq P\left(|X - X_n| > \frac{\varepsilon}{2}\right) + P\left(|X_n - Y| > \frac{\varepsilon}{2}\right) \rightarrow 0.$$

于是对任意 $\varepsilon > 0$,

$$P(|X - Y| > \varepsilon) = 0.$$

从而

$$P(X \neq Y) = P\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} \left\{|X - Y| > \frac{1}{m}\right\}\right) = 0.$$

故

$$P(X = Y) = 1.$$

(2) 对任意 $\varepsilon > 0$, 任取 $M > 0$. 若

$$|X| \leq M, \quad |Y| \leq M, \quad |X_n - X| \leq \delta, \quad |Y_n - Y| \leq \delta,$$

则

$$\begin{aligned} |X_n Y_n - XY| &= |(X_n - X)(Y_n - Y) + X(Y_n - Y) + Y(X_n - X)| \\ &\leq \delta^2 + 2M\delta. \end{aligned}$$

取 $\delta > 0$ 充分小, 使得

$$\delta^2 + 2M\delta < \varepsilon.$$

于是

$$\{|X_n Y_n - XY| > \varepsilon\} \subset \{|X| > M\} \cup \{|Y| > M\} \cup \{|X_n - X| > \delta\} \cup \{|Y_n - Y| > \delta\}.$$

所以

$$\begin{aligned} P(|X_n Y_n - XY| > \varepsilon) &\leq P(|X| > M) + P(|Y| > M) \\ &\quad + P(|X_n - X| > \delta) + P(|Y_n - Y| > \delta). \end{aligned}$$

令 $n \rightarrow \infty$, 由 $X_n \xrightarrow{P} X, Y_n \xrightarrow{P} Y$, 得

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} P(|X_n Y_n - XY| > \varepsilon) \leq P(|X| > M) + P(|Y| > M).$$

再令 $M \rightarrow \infty$, 得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n Y_n - XY| > \varepsilon) = 0.$$

因此

$$X_n Y_n \xrightarrow{P} XY.$$

2. (12 分) 设 $I_1, \dots, I_K$ 将区间 $[0, 1]$ 划分成 K 个不交的小区间, 其中区间 I_i 的长度为 p_i , $1 \leq i \leq K$. $U_1, \dots, U_n$ 为相互独立且服从 $[0, 1]$ 均匀分布的随机变量, 定义 $Z_i^{(n)}$ 为 $U_1, \dots, U_n$ 落在区间 I_i 的个数, 再定义

$$R_n = \prod_{i=1}^K p_i^{Z_i^{(n)}}.$$

证明

$$R_n^{\frac{1}{n}} \xrightarrow{\text{a.s.}} \exp \left\{ \sum_{i=1}^K p_i \ln p_i \right\}.$$

解答 对每个 $i = 1, \dots, K$, 记

$$\xi_j^{(i)} = \mathbf{1}_{\{U_j \in I_i\}}, \quad j = 1, \dots, n.$$

则

$$Z_i^{(n)} = \sum_{j=1}^n \xi_j^{(i)}.$$

因为 $U_j \sim U[0, 1]$, 且区间 I_i 的长度为 p_i , 所以

$$P(U_j \in I_i) = p_i.$$

因此

$$E\xi_j^{(i)} = p_i.$$

又 $\xi_1^{(i)}, \xi_2^{(i)}, \dots$ 相互独立同分布, 由强大数定律,

$$\frac{Z_i^{(n)}}{n} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \xi_j^{(i)} \xrightarrow{\text{a.s.}} p_i.$$

由于 K 是有限的, 所以上述收敛对所有 $i = 1, \dots, K$ 可同时成立。

于是

$$\ln R_n^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \ln R_n = \frac{1}{n} \ln \left(\prod_{i=1}^K p_i^{Z_i^{(n)}} \right) = \sum_{i=1}^K \frac{Z_i^{(n)}}{n} \ln p_i.$$

令 $n \rightarrow +\infty$, 得到

$$\ln R_n^{\frac{1}{n}} \xrightarrow{\text{a.s.}} \sum_{i=1}^K p_i \ln p_i.$$

两边取指数, 便有

$$R_n^{\frac{1}{n}} \xrightarrow{\text{a.s.}} \exp \left\{ \sum_{i=1}^K p_i \ln p_i \right\}.$$

3. (14 分) 设 $X_1, \dots, X_n, \dots$ 为相互独立的随机变量, $X_n \sim \text{Pois}(n)$, 随机变量 $Z \sim N(0, 1)$, 证明:

(1)

$$\frac{X_n - n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d} Z.$$

(2)

$$\frac{(X_n - n) + (X_{2n} - 2n)}{\sqrt{X_n + X_{2n}}} \xrightarrow{d} Z.$$

解答

(1) 记

$$Y_n = \frac{X_n - n}{\sqrt{n}}.$$

因为 $X_n \sim \text{Pois}(n)$, 所以 Y_n 的特征函数为

$$\varphi_{Y_n}(t) = Ee^{it\frac{X_n - n}{\sqrt{n}}} = e^{-it\sqrt{n}} \exp\left\{n\left(e^{it/\sqrt{n}} - 1\right)\right\}.$$

于是

$$\varphi_{Y_n}(t) = \exp\left\{n\left(e^{it/\sqrt{n}} - 1 - \frac{it}{\sqrt{n}}\right)\right\}.$$

由展开式

$$e^{it/\sqrt{n}} = 1 + \frac{it}{\sqrt{n}} - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

得

$$n\left(e^{it/\sqrt{n}} - 1 - \frac{it}{\sqrt{n}}\right) \rightarrow -\frac{t^2}{2}.$$

因此

$$\varphi_{Y_n}(t) \rightarrow e^{-t^2/2}.$$

而 $e^{-t^2/2}$ 是标准正态分布 $N(0, 1)$ 的特征函数, 所以

$$\frac{X_n - n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d} Z.$$

(2) 由于 X_n 与 X_{2n} 相互独立, 且

$$X_n \sim \text{Pois}(n), \quad X_{2n} \sim \text{Pois}(2n),$$

所以

$$X_n + X_{2n} \sim \text{Pois}(3n).$$

类似第一问, 由特征函数可得

$$\frac{(X_n + X_{2n}) - 3n}{\sqrt{3n}} \xrightarrow{d} Z.$$

从而

$$\frac{X_n + X_{2n}}{3n} \xrightarrow{P} 1.$$

另一方面,

$$(X_n - n) + (X_{2n} - 2n) = (X_n + X_{2n}) - 3n.$$

所以由上面同样的结论,

$$\frac{(X_n - n) + (X_{2n} - 2n)}{\sqrt{3n}} \xrightarrow{d} Z.$$

于是

$$\frac{(X_n - n) + (X_{2n} - 2n)}{\sqrt{X_n + X_{2n}}} = \frac{(X_n - n) + (X_{2n} - 2n)}{\sqrt{3n}} \cdot \sqrt{\frac{3n}{X_n + X_{2n}}}.$$

其中

$$\sqrt{\frac{3n}{X_n + X_{2n}}} \xrightarrow{P} 1.$$

由 Slutsky 定理,

$$\frac{(X_n - n) + (X_{2n} - 2n)}{\sqrt{X_n + X_{2n}}} \xrightarrow{d} Z.$$

4. (16 分) 将 n 个可分辨的球随机放入 n 个盒子中, 每个球独立等概率地放入任一盒子, 设 S_n 为全部放完后空盒子的个数。

(1) 求 S_n 的期望和方差。

(2) 证明 $n \rightarrow +\infty$ 时,

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} e^{-1}.$$

解答

(1) 令

$$I_i = \begin{cases} 1, & \text{第 } i \text{ 个盒子为空,} \\ 0, & \text{第 } i \text{ 个盒子不为空,} \end{cases} \quad i = 1, \dots, n. \quad S_n = \sum_{i=1}^n I_i.$$

对每个 i , 有

$$P(I_i = 1) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n.$$

记

$$p_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n.$$

于是

$$ES_n = \sum_{i=1}^n EI_i = np_n = n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n.$$

下面求方差。对 $i \neq j$, 有

$$E(I_i I_j) = P(\text{第 } i, j \text{ 个盒子都为空}) = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n.$$

因此

$$\text{Var}(I_i) = p_n(1 - p_n), \quad \text{Cov}(I_i, I_j) = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n - p_n^2.$$

所以

$$\text{Var}(S_n) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(I_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{Cov}(I_i, I_j) = np_n(1 - p_n) + n(n-1) \left[\left(1 - \frac{2}{n}\right)^n - p_n^2 \right].$$

(2) 由第一问,

$$E \frac{S_n}{n} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e^{-1}.$$

又

$$\text{Var} \left(\frac{S_n}{n} \right) = \frac{\text{Var}(S_n)}{n^2}.$$

由上一问的方差公式得

$$\text{Var} \left(\frac{S_n}{n} \right) = \frac{p_n(1 - p_n)}{n} + \frac{n-1}{n} \left[\left(1 - \frac{2}{n}\right)^n - p_n^2 \right].$$

其中

$$p_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e^{-1},$$

并且

$$\left(1 - \frac{2}{n}\right)^n \rightarrow e^{-2}, \quad p_n^2 \rightarrow e^{-2}.$$

故

$$\text{Var} \left(\frac{S_n}{n} \right) \rightarrow 0.$$

对任意 $\varepsilon > 0$, 当 n 充分大时,

$$\left| E \frac{S_n}{n} - e^{-1} \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

于是由 Chebyshev 不等式,

$$\begin{aligned} P \left(\left| \frac{S_n}{n} - e^{-1} \right| > \varepsilon \right) &\leq P \left(\left| \frac{S_n}{n} - E \frac{S_n}{n} \right| > \frac{\varepsilon}{2} \right) \\ &\leq \frac{4}{\varepsilon^2} \text{Var} \left(\frac{S_n}{n} \right) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

所以

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} e^{-1}.$$

5. (18 分) 设随机向量

$$Y = (Y_1, \dots, Y_n)^T$$

服从 n 维高斯分布, 且对任意 $i \neq j$ 有

$$E(Y_i | Y_j) = 0, \quad E(Y_i^2 | Y_j) = 1.$$

(1) 求 Y 的分布。

(2) 设 A 为 n 阶实矩阵,

$$X = AY = (X_1, \dots, X_n)^T,$$

求 X 的期望和协方差矩阵。

(3) 设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$, 其中

$$a_{ij} = \sqrt{ij},$$

且 $X = AY$, 求在 $\{X_1 = x\}$ 下 Y_1 的条件分布。

解答

(1) 对任意 $i \neq j$, 由 $E(Y_i | Y_j) = 0$ 两边取期望, 得 $EY_i = 0$. 同理有 $EY_i^2 = 1$. 所以 $\text{Var}(Y_i) = EY_i^2 - (EY_i)^2 = 1$. 再由条件期望性质,

$$E(Y_i Y_j) = E\{Y_j E(Y_i | Y_j)\} = 0.$$

因此

$$\text{Cov}(Y_i, Y_j) = 0, \quad i \neq j.$$

故 Y 的期望向量为 0, 协方差矩阵为 I_n . 又 Y 服从 n 维高斯分布, 所以

$$Y \sim N(0, I_n).$$

(2) 因为

$$X = AY,$$

所以

$$EX = AEY = 0.$$

又

$$\text{Cov}(Y) = I_n,$$

于是

$$\text{Cov}(X) = A \text{Cov}(Y) A^T = AA^T.$$

(3)

$$X_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} Y_j = \sqrt{i} \sum_{j=1}^n \sqrt{j} Y_j.$$

特别地,

$$X_1 = \sum_{j=1}^n \sqrt{j} Y_j.$$

记

$$W = X_1 = \sum_{j=1}^n \sqrt{j} Y_j.$$

由于 $Y_1, \dots, Y_n$ 相互独立且均服从 $N(0, 1)$, 所以 (Y_1, W) 为二维正态向量, 并且

$$EY_1 = EW = 0,$$

$$\text{Var}(Y_1) = 1,$$

$$\text{Var}(W) = \sum_{j=1}^n j = \frac{n(n+1)}{2},$$

$$\text{Cov}(Y_1, W) = \text{Cov}\left(Y_1, \sum_{j=1}^n \sqrt{j} Y_j\right) = 1.$$

由二维正态条件分布公式,

$$Y_1 | X_1 = x \sim N\left(\frac{\text{Cov}(Y_1, X_1)}{\text{Var}(X_1)} x, \text{Var}(Y_1) - \frac{\text{Cov}(Y_1, X_1)^2}{\text{Var}(X_1)}\right).$$

代入上面的结果, 得到

$$Y_1 | X_1 = x \sim N\left(\frac{2x}{n(n+1)}, 1 - \frac{2}{n(n+1)}\right).$$

6. (16 分) 设 X, Y, Z 相互独立, 且均服从分布 $N(0, 1)$, 定义

$$T = \frac{X + YZ}{\sqrt{1 + Z^2}}, \quad S = \frac{2XY}{\sqrt{X^2 + Y^2}}.$$

(1) 证明 T 与 Z 独立, 且 $T \sim N(0, 1)$ 。

(2) 证明 $S \sim N(0, 1)$ 。

解答

(1) 对任意给定的 $Z = z$, 由于 X, Y 相互独立且均服从 $N(0, 1)$, 有

$$X + zY \sim N(0, 1 + z^2).$$

因此

$$\frac{X + zY}{\sqrt{1 + z^2}} \sim N(0, 1).$$

即

$$T \mid Z = z \sim N(0, 1),$$

且这个条件分布与 z 无关, 即独立。

【注:】更严格地, 对任意 $s, t \in \mathbb{R}$,

$$Ee^{itT+isZ} = E[e^{isZ} E(e^{itT} \mid Z)].$$

由上面的条件分布可知

$$E(e^{itT} \mid Z) = e^{-t^2/2}.$$

所以

$$Ee^{itT+isZ} = e^{-t^2/2} Ee^{isZ}.$$

这说明 (T, Z) 的联合特征函数分解为 T 与 Z 的特征函数之积, 因此

$$T \perp Z, \quad T \sim N(0, 1).$$

(2) 记

$$S = \frac{2XY}{\sqrt{X^2 + Y^2}}, \quad W = \frac{X^2 - Y^2}{\sqrt{X^2 + Y^2}}.$$

由于 $P(X^2 + Y^2 = 0) = 0$, 所以下面可忽略原点处的情形。

考虑变换

$$s = \frac{2xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad w = \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

则

$$s^2 + w^2 = \frac{4x^2y^2 + (x^2 - y^2)^2}{x^2 + y^2} = x^2 + y^2.$$

并且直接计算可得

$$\left| \frac{\partial(s, w)}{\partial(x, y)} \right| = 2.$$

对任意给定的 $(s, w) \neq (0, 0)$, 方程

$$\frac{2xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = s, \quad \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = w$$

恰有两个解, 且这两个解互为相反数。又这两个解都满足

$$x^2 + y^2 = s^2 + w^2.$$

因此由多对一变量变换公式,

$$\begin{aligned} f_{S,W}(s, w) &= 2 \cdot \frac{1}{2\pi} \exp\left\{-\frac{x^2 + y^2}{2}\right\} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2\pi} \exp\left\{-\frac{s^2 + w^2}{2}\right\}. \end{aligned}$$

所以

$$f_{S,W}(s, w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-s^2/2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-w^2/2}.$$

于是 S 的边缘密度为

$$f_S(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-s^2/2}.$$

故

$$S \sim N(0, 1).$$

7. (14 分) 小明按照如下规则掷硬币和骰子：首先掷一次硬币，若掷出反面则继续掷硬币，直至掷出正面；若掷出正面则掷一次骰子，若掷出 6 点则结束，若掷出点数不是 6 点，则重新开始掷硬币。设结束时小明共掷了 X 次，包括掷硬币和骰子的总次数，求 X 的母函数。（硬币和骰子都是公平的。）

解答 设 $G_X(t) = E(t^X)$ 。

记 H 为一次“掷硬币直到第一次出现正面”所需的硬币次数，则

$$P(H = k) = \left(\frac{1}{2}\right)^k, \quad k = 1, 2, \dots$$

所以

$$G_H(t) = E(t^H) = \sum_{k=1}^{\infty} t^k \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{t}{2-t}.$$

每一轮包括先掷硬币直到正面，再掷一次骰子，因此一轮的总次数为

$$L = H + 1.$$

于是

$$G_L(t) = E(t^L) = tG_H(t) = \frac{t^2}{2-t}.$$

每一轮结束的概率为掷骰子得到 6 点，即

$$p = \frac{1}{6}.$$

设 N 为结束前共进行了多少轮，则

$$P(N = m) = \left(\frac{5}{6}\right)^{m-1} \frac{1}{6}, \quad m = 1, 2, \dots$$

且

$$X = L_1 + \dots + L_N,$$

其中 $L_1, L_2, \dots$ 相互独立同分布，且与骰子结果独立。

因此

$$\begin{aligned} G_X(t) &= \sum_{m=1}^{\infty} P(N = m) (G_L(t))^m \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^{m-1} \left(\frac{t^2}{2-t}\right)^m \\ &= \frac{\frac{1}{6} \frac{t^2}{2-t}}{1 - \frac{5}{6} \frac{t^2}{2-t}}. \end{aligned}$$

整理得

$$G_X(t) = \frac{t^2}{12 - 6t - 5t^2}.$$

故 X 的母函数为

$$G_X(t) = E(t^X) = \frac{t^2}{12 - 6t - 5t^2}.$$